

Feuille d'exercices n°86

Exercice 1 (**)

Soient p et q deux nombres premiers distincts. On note $n = pq$. Soit d entier premier avec $w = (p-1)(q-1)$.

1. Justifier qu'il existe un entier e tel que $de \equiv 1 [w]$.
2. Montrer
$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^{de} \equiv x [n]$$

Exercice 2 (***)

Soit n entier impair, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. Calculer $|Z|^2$.

Exercice 3 (***)

Déterminer les entiers $n \geq 2$ tel que $\varphi(n)$ divise n .

Exercice 4 (***)

Soient m, n des entiers non nuls. Établir

$$(3^n - 1) \wedge (3^m - 1) = 3^{n \wedge m} - 1$$

Exercice 5 (***)

Soit p nombre premier impair. Déterminer le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_p$.

Exercice 6 (***)

Soit p entier avec $p \geq 2$. Montrer le théorème de *Wilson* :

$$(p-1)! \equiv -1 [p] \iff p \text{ premier}$$

Exercice 7 (***)

1. Soit $p > 2$ un nombre premier. Montrer :

$$-1 \text{ carré dans } \mathbb{F}_p \iff p \equiv 1 [4]$$

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $1 + 4n$ avec n entier.

Exercice 8 (***)

Soit n un entier avec $n \geq 2$ et p un nombre premier. Montrer

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Exercice 9 (***)

Soit p premier et k entier. Montrer que

$$\sum_{\bar{x} \in \mathbb{F}_p} \bar{x}^k = \bar{0} \quad \text{ou} \quad -\bar{1}$$

Exercice 10 (***)

Soit $n \geq 3$ entier impair.

1. Soit p nombre premier impair et α entier non nul. Montrer

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha} \iff x \equiv \pm 1 \pmod{p^\alpha}$$

2. Combien y-a-t-il d'éléments x de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ vérifiant $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$?
3. Déterminer le nombre de carrés de $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?