

Feuille d'exercices n°87

Exercice 1 (**)

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $p = 4n + 3$ avec n entier non nul.

Indications : Vérifier qu'il existe des nombres premiers de la forme $4n + 3$ avec n entier non nul puis supposer qu'il sont en nombre fini et construire un entier permettant d'exhiber une contradiction.

Exercice 2 (**)

Soit n entier avec $n \geq 2$. Montrer que n ne divise pas $2^n - 1$.

Indications : Considérer p plus petit facteur premier de n puis étudier l'ordre de $\bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (**)

Soit p un nombre premier impair et $x \in \mathbb{Z}$. Montrer

$$\bar{x} \in \mathbb{F}_p \text{ est un carré} \iff x^{\frac{p+1}{2}} \equiv x \pmod{p}$$

On admettra le résultat suivant : pour $P \in \mathbb{F}_p[X]$, le polynôme P admet au plus $\deg P$ racines distinctes.

Indications : Pour le sens indirect, considérer le morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^*, x \mapsto x^2$ puis déterminer $\text{Card Im } \varphi$. Comparer enfin les racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ aux éléments de $\text{Im } \varphi$.

Exercice 4 (***)

Soit p un nombre premier tel que $p^2 + 2$ est aussi premier. Montrer que $p^3 + 2$ l'est aussi.

Indications : Distinguer $p = 2$, $p = 3$ puis $p \geq 5$ et examiner $p^2 + 2$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 5 (***)

Soit a entier non nul et p entier avec $p \geq 2$ tels que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. On suppose que pour tout diviseur strict d de $p - 1$, l'entier $a^d - 1$ est premier avec p . Montrer que p est premier.

Indications : Montrer que $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet un élément d'ordre $p - 1$.

Exercice 6 (***)

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Indications : Utiliser le petit théorème de Fermat pour réduire les cas d'étude de l'exposant puis procéder par exhaustion.

Exercice 7 (***)

Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Indications : Notant $\Delta_0 = \llbracket 1; q-1 \rrbracket \times \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, déterminer Card Δ_0 en fonction de $\Delta_1 : pk < q\ell$, $\Delta_2 : pk > q\ell$ et $\Delta_3 : pk = q\ell$. Considérer ensuite l'application $\varphi : \Delta_0 \rightarrow \Delta_0, (k, \ell) \mapsto (q-k, p-\ell)$.

Exercice 8 (****)

Pour n entier non nul, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n puis on pose

$$P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p \quad \text{et} \quad \pi(n) = \text{Card } \mathcal{P}(n)$$

et $\forall x > 0 \quad \varphi(x) = x(\ln(x) - 1)$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{2n+1}{n} \leq 4^n$

2. Établir $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{2n+1} \leq 4^n P_{n+1}$

3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n \leq 4^n$

4. Établir $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) \leq \ln(n!)$

5. Montrer $\forall n \geq 2 \quad 2n \ln(2) \leq \varphi\left(e \frac{n}{\ln(n)}\right)$

6. En déduire $\forall n \geq 2 \quad \pi(n) \leq e \frac{n}{\ln(n)}$

Indications : 1. Minorer $(1+1)^{2n+1}$.

2. Établir $\prod_{p \in \mathcal{P} \cap \llbracket n+2; 2n+1 \rrbracket} p \quad \text{divise} \quad n! \binom{2n+1}{n}$

puis utiliser le lemme de Gauss.

3. Procéder par récurrence en considérant $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket \quad P_k \leq 4^k$.

4. Utiliser une comparaison série/intégrale pour $n \geq 2$.

5. Procéder par équivalence et considérer la fonction $\psi : x > 0 \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

6. Majorer $\pi(n)!$ pour $n \geq 2$ et utiliser les résultats des questions précédentes.