

## Devoir en temps libre n°17

### Problème I

Soit  $n$  entier avec  $n \geq 2$ . On pose  $M_0 = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $M_x = xI_n + M_0$  pour  $x$  réel. Pour  $\sigma \in S_n$ , on note  $\nu(\sigma)$  le nombre de points fixes de  $\sigma$ .

1. Montrer que la matrice  $M_0$  est diagonalisable et préciser ses éléments propres (valeurs propres et espaces propres).

2. En déduire  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$

3. Calculer  $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \quad \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1 + \nu(\sigma)}$

### Problème II

On note  $GL_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $M$  et  $M^{-1}$  sont à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

1. Montrer que  $(GL_n(\mathbb{Z}), \times)$  est un groupe.

2. Soit  $d$  entier non nul et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M^d = I_n$ . On pose  $A = \frac{M - I_n}{3}$ . Étudier la convergence de la suite  $(A^k)_k$ .

3. On pose 
$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_3) \\ M & \longmapsto \overline{M} \end{cases}$$

avec, pour  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{Z})$ , la matrice  $\overline{M}$  définie par  $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})_{1 \leq i,j \leq n}$ .  
Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $(GL_n(\mathbb{Z}), \times)$ .

(a) Justifier que l'application  $\varphi$  est un morphisme d'anneaux.

(b) Établir que le morphisme d'anneaux  $\varphi$  induit un isomorphisme du groupe  $(G, \times)$  sur  $(\varphi(G), \times)$ .

(c) En déduire  $\text{Card } G \leq 3^{n^2}$

### Problème III

Pour  $n$  entier non nul, on note  $r_n$  la probabilité que deux nombres aléatoires dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$  soient premiers entre eux. On souhaite montrer

$$r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\pi^2}$$

On admet l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit  $\mu$  la fonction de Möbius par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $n$  entier non nul, on pose

$$P(n) = \text{Card } \Lambda(n) \quad \text{avec} \quad \Lambda(n) = \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid a \wedge b = 1\} \quad \text{et} \quad M(n) = \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

1. Soit  $n$  entier non nul. En considérant l'union disjointe

$$\llbracket 1; n \rrbracket^2 = \bigsqcup_{k=1}^n \{(a, b) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid a \wedge b = k\}$$

établir 
$$n^2 = \sum_{k=1}^n P\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

2. Soit  $x$  réel et  $a, b$  entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

3. Établir 
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{n,1}$$

Pour  $n \geq 2$  et  $d$  diviseur de  $n$ , on pourra distinguer le cas où  $d$  admet un facteur carré et le cas où il est sans facteur carré et s'écrivant comme produit de  $j$  facteurs premiers pris parmi les  $r$  facteurs premiers de  $n$  avec  $j \in \llbracket 0; r \rrbracket$ .

4. Soit  $n$  entier non nul. En considérant  $\sum_{k=1}^n P\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \left(\sum_{d|k} \mu(d)\right)$ , établir  $M = P$ .

5. Calculer  $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right)$ .

6. Conclure.