ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°79

Exercice 1 (*)

Décrire les groupes d'ordre 3. Donner deux exemples de tels groupes.

Corrigé : Soit G un groupe d'ordre 3. Il existe un élément $x \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$. On a $o(x)$ diviseur de 3 et $o(x) = \mathrm{Card}\ \langle x \rangle > 1$ puisque $\{e, x\} \subset \langle x \rangle$. On en déduit $\mathrm{G} = \langle x \rangle$ et on conclut

$$\boxed{\text{Les groupes d'ordre 3 sont isomorphes à } \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.}$$

Les groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathcal{A}_3$ sont d'ordre 3.

Exercice 2 (*)

Déterminer deux groupes d'ordre 6 non isomorphes.

Corrigé : Le groupe S_3 est d'ordre 6 et n'est pas abélien puisque

$$(1\ \ 2)\,(2\ \ 3) \neq (2\ \ 3)\,(1\ \ 2)$$

S'il n'est pas abélien, il n'est pas cyclique. Ainsi

$$\boxed{\text{Les groupes } \mathrm{S}_3 \text{ et } \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \text{ sont d'ordre 6 mais non isomorphes.}}$$

Exercice 3 (*)

Déterminer tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Corrigé : Soit φ un automorphisme. On a $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{Z}$ d'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = \varphi(k)$. Par propriété de morphisme, on a $\varphi(k) = k\varphi(1)$ d'où $\varphi(1)|1$ ce qui impose $\varphi(1) \in \{\pm 1\}$ et par conséquent $\varphi = \pm\,\mathrm{id}$. Réciproquement, de telles applications sont des automorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$. On conclut

$$\boxed{\text{Les automorphismes de } (\mathbb{Z}, +) \text{ sont id et } -\mathrm{id}.}$$

Variante : Comme on a $\varphi(k) = k\varphi(1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit $\mathrm{Im}\ \varphi = \varphi(1)\mathbb{Z}$ et comme φ est un automorphisme, on a donc $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{Z}$ d'où $\varphi(1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ce qui prouve que $\varphi(1)$ et 1 sont associés d'où $\varphi(1) = \pm 1$. On conclut comme précédemment.

Exercice 4 (*)

Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Corrigé : Soit $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ un isomorphisme de groupes. Par surjectivité, il existe x réel tel que $\varphi(x) = -1$ et par suite

$$\varphi(x) = \varphi\left(2\frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = -1$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Les groupes } (\mathbb{R}, +) \text{ et } (\mathbb{R}^*, \times) \text{ ne sont pas isomorphes.}}$$

Exercice 5 (*)

Soient $(\mathrm{G},\times)$, $(\mathrm{G}',\times)$ des groupe, $\mathrm{C}=\{aba^{-1}b^{-1},(a,b)\in\mathrm{G}^2\}$ et $\varphi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ un morphisme de groupes. Montrer

$$(\varphi(\mathrm{G}),\times)\text{ abélien }\iff\langle\mathrm{C}\rangle\subset\operatorname{Ker}\varphi$$

Corrigé : Pour $(a,b)\in\mathrm{G}^2$, on a par morphisme de groupes

$$\varphi(aba^{-1}b^{-1})=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}=e'\iff\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(b)\varphi(a)$$

Ainsi $$(\varphi(\mathrm{G}),\times)\text{ abélien }\iff\mathrm{C}\subset\operatorname{Ker}\varphi$$

Comme $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe de G, on a $\mathrm{C}\subset\operatorname{Ker}\varphi\iff\langle\mathrm{C}\rangle\subset\operatorname{Ker}\varphi$. Ainsi

$$\boxed{(\varphi(\mathrm{G}),\times)\text{ abélien }\iff\langle\mathrm{C}\rangle\subset\operatorname{Ker}\varphi}$$

Vocabulaire : Les éléments de la partie C sont appelés *commutateurs* de G.

Exercice 6 (*)

Soit $n\geqslant 2$. Calculer $$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)$$

Corrigé : Soit τ une transposition de S_n. L'application $\varphi:\mathrm{S}_n\to\mathrm{S}_n,\sigma\mapsto\tau\circ\sigma$ est une permutation de S_n (c'est une involution). Par conséquent, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)=\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\tau\circ\sigma)=\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$$

Or, la signature d'une transposition est égale à -1 et par conséquent

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)=-\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)$$

Ainsi $$\boxed{\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)=0}$$

Variante : Pour $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det\mathrm{A}=\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$. Ainsi, notant J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\varepsilon(\sigma)=\det\mathrm{J}$$

La matrice J contient (au moins) deux colonnes identiques et n'est donc pas inversible. On retrouve alors le résultat précédent.

Exercice 7 (**)

1. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Corrigé : Soit $\varphi:(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)\to(\mathrm{G},+)$ un morphisme de groupes. On a $\varphi(\bar{k})=k\varphi(\bar{1})$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ ce qui signifie que φ est caractérisé par $\varphi(\bar{1})$.

1. Le groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est d'ordre 8. On a $o(\varphi(\bar{1}))|3$ et $o(\varphi(\bar{1}))|8$ d'où $o(\varphi(\bar{1}))|3\wedge 8=1$, *i.e.* $\varphi(\bar{1})=\widehat{0}$. Ainsi

Le morphisme nul est l'unique morphisme de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. On a $o(\varphi(\bar{1}))|6 \wedge 8 = 2$. Ainsi, on a $2\varphi(\bar{1}) = \widehat{0}$ d'où $\varphi(\bar{1}) \in \left\{\widehat{0}, \widehat{4}\right\}$ d'où les morphismes candidats : le morphisme nul et $\bar{x} \mapsto \widehat{4x}$ qui est bien défini puisque pour $\bar{x} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $x \in \bar{x}$, on envoie $\bar{x} = x\bar{1} \mapsto x\widehat{4} = \widehat{4x}$ et le choix du représentant n'influe pas. La synthèse est immédiate et on conclut

Les morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont le morphisme nul et $\bar{x} \to \widehat{4x}$.

Exercice 8 (**)

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Corrigé : Soit $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupes. Pour x rationnel, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f(x) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$$

ce qui prouve que $f(x)$ est un entier naturel divisible par tout entier non nul d'où $f(x) = 0$. Ainsi

L'unique morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ est le morphisme nul.

Variante : Soit $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupes. L'ensemble $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} f = n\mathbb{Z}$. Supposons $n \neq 0$. Comme $n \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) = n$. Puis

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) = n \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{n}{2} \in \operatorname{Im} f$$

ce qui contredit $\operatorname{Im} f = n\mathbb{Z}$.

Exercice 9 (**)

Soit $n \geqslant 3$. Montrer que S_n est engendré par les permutations suivantes :

1. $(1 \quad 2), \ldots, (1 \quad n)$;
2. $(1 \quad 2), (2 \quad 3), \ldots, (n-1 \quad n)$;
3. $(1 \quad 2), (2 \quad 3 \quad \ldots \quad n)$.

Corrigé : 1. Soit $(i, j) \in [\![2\,;\, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On observe

$$(i \quad j) = (1 \quad i)\,(1 \quad j)\,(1 \quad i)$$

Toute transposition est donc engendré par $\left\{(1, k)\,,\ k \in [\![2\,;\, n]\!]\right\}$ et comme les transpositions engendrent S_n, on conclut

$$\mathrm{S}_n = \left\langle \left\{ (1 \quad k)\,,\ k \in [\![2\,;\, n]\!] \right\} \right\rangle$$

Remarque : On a utilisé le fait que les 2-cycles sont conjuguées pour avoir l'intuition de cette décomposition.

2. Soit $\mathrm{H} = \left\langle \left\{ (1 \quad 2)\,, (2 \quad 3)\,, \ldots, (n-1 \quad n) \right\} \right\rangle$. On montre par récurrence $(1 \quad k) \in \mathrm{H}$ pour $k \in [\![2\,;\, n]\!]$. L'initialisation est vraie pour $k = 2$. On suppose la propriété vraie au rang $k \in [\![2\,;\, n-1]\!]$ fixé. On a

$$(1 \quad k+1) = (1 \quad k)\,(k \quad k+1)\,(1 \quad k) \in \mathrm{H}$$

d'où l'hérédité et d'après le résultat de la première question, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}_n = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n-1 & n \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}$$

3. On observe

$$\forall k \in [\![2\,;\, n-1]\!] \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on trouve $\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix} \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ pour tout $k \in [\![2\,;\, n]\!]$ et avec le résultat de la première question, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}_n = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}$$

Exercice 10 (**)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ de cardinal d.

Corrigé : Soit d diviseur de n. L'ensemble $\{\bar{0}\}$ est l'unique sous-groupe d'ordre 1 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On suppose $d > 1$. On a $n = cd$ avec c entier non nul puis $d\bar{c} = \bar{0}$ et $\ell\bar{c} \neq \bar{0}$ pour $\ell \in [\![1\,;\, d-1]\!]$ puisque les $\bar{k}$ pour $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ sont deux à deux distincts. On en déduit $o(\bar{c}) = d$ et par conséquent $\langle \bar{c} \rangle$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre d décrit par

$$\langle \bar{c} \rangle = \{k\bar{c}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{c}, \dots, (d-1)\bar{c}\}$$

Montrons l'unicité de ce sous-groupe. Soit H sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d. Pour $\bar{x} \in \mathrm{H}$ et $x \in \bar{x}$, on a $d\bar{x} = \bar{0}$ d'où $dx \equiv 0\ [n]$, *i.e.* $dx = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$ puis $dx = kdc$ autrement dit $x = kc$ d'où $\bar{x} \in \langle \bar{c} \rangle$. Il s'ensuit que $\mathrm{H} \subset \langle \bar{c} \rangle$ et par égalité des cardinaux, on conclut que $\mathrm{H} = \langle \bar{c} \rangle$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } d \text{ diviseur de } n, \text{ il existe un unique sous-groupe de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ de cardinal } d.}$$

Exercice 11 (**)

Dénombrer les p-cycles de S_n.

Corrigé : Choisir un p-cycle, c'est d'abord choisir une p-liste $(i_1, \dots, i_p)$ d'éléments de $[\![1\,;\, n]\!]$ et ensuite tenir compte du fait que pour $c = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \end{pmatrix}$, on a

$$\forall k \in [\![0\,;\, p-1]\!] \qquad \begin{pmatrix} i_{c^k(1)} & \dots & i_{c^k(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que chaque p-cycle est donc compté p fois. On conclut

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{n!}{p(n-p)!} \text{ } p\text{-cycles dans } \mathrm{S}_n.}$$

Variante : Choisir un p-cycle, c'est d'abord choisir p éléments de $[\![1\,;\, n]\!]$, puis considérer le minimum du support comme début du cycle et choisir une permutation des $(p-1)!$ éléments restants ce qui fait

$$\binom{n}{p}(p-1)! \text{ choix de } p\text{-cycle dans } \mathrm{S}_n$$

Exercice 12 (**)

Soit n entier non nul. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on pose $\mathrm{M}_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application canoniquement associée. Déterminer la nature de l'application de $\dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f_\sigma$ et préciser son noyau et son image.

Corrigé : Notons $f = \dfrac{1}{n!}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} f_\sigma$ puis $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} f$ avec $\mathscr{C}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notant $\mathrm{M} = \big(m_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a

$$\forall (i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2 \qquad m_{i,j} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n}\delta_{i,\sigma(j)} = \frac{1}{n!}\,\mathrm{Card}\,\{\sigma\in \mathrm{S}_n \mid \sigma(j)=i\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Notant $\mathrm{J}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice constituée de 1, on a $\mathrm{M} = \dfrac{1}{n}\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}^2 = n\mathrm{J}$ d'où $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$. Sans difficulté, on trouve $\mathrm{Ker}\,\mathrm{M} : \sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $\mathrm{Im}\,\mathrm{M} = \mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u = (1,\dots,1)$ et on conclut

L'application f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\,(u)$ parallèlement à l'hyperplan $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Variante : Notons $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ da base canonique. Soit $\sigma\in\mathrm{S}_n$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathrm{E}$,

on a $$f_\sigma(x) = f_\sigma\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(e_i)} e_i$$

Ainsi $$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(e_i)} e_i = \sum_{i=1}^n\left(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} x_{\sigma^{-1}(e_i)}\right) e_i$$

Or $$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} x_{\sigma^{-1}(e_i)} = \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n \mid \sigma(j)=i} x_j = \sum_{j=1}^n x_j\,\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathrm{S}_n \mid \sigma(j)=i\} = (n-1)!\sum_{j=1}^n x_j$$

Ainsi $$f(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)$$

On retrouve le résultat précédent.

Exercice 13 (**)

Soit $(\mathrm{G},\times)$ un groupe fini d'ordre n. Montrer que

1. $(\mathrm{G},\times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{S}_n,\circ)$;
2. $(\mathrm{G},\times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathcal{A}_{n+2},\circ)$;

Corrigé : 1. Soit $a\in\mathrm{G}$ et $\varphi_a : \mathrm{G}\to\mathrm{G}, x\mapsto ax$. L'application φ_a est une permutation de G (d'application réciproque $\varphi_{a^{-1}}$). Considérons l'application $\Phi : \mathrm{G}\to\mathrm{S}(\mathrm{G}), a\mapsto\varphi_a$. Pour $(a,b)\in\mathrm{G}^2$, on a

$$\forall x\in\mathrm{G} \qquad \Phi(ab)(x) = \varphi_{ab}(x) = abx = \varphi_a\circ\varphi_b(x) = \Phi(a)\circ\Phi(b)(x)$$

autrement dit $$\Phi(ab) = \Phi(a)\circ\Phi(b)$$

ce qui prouve que Φ est un morphisme de groupes. Puis, pour $a\in\mathrm{G}$, on trouve

$$\Phi(a) = \mathrm{id} \iff \forall x\in\mathrm{G} \qquad ax = x \iff a = 1$$

d'où l'injectivité de Φ. Par conséquent, on a

$$\mathrm{G}\simeq\Phi(\mathrm{G}) \quad \text{avec} \quad \Phi(\mathrm{G}) \text{ sous-groupe de } \mathrm{S}(\mathrm{G})$$

Comme $\mathrm{S}(\mathrm{G})$ est isomorphe à S_n, on obtient

Le groupe $(\mathrm{G}, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathrm{S}_n, \circ)$.

Remarque : Ce résultat s'intitule *théorème de Cayley*.

2. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, on identifie σ à une permutation de S_{n+2} qui fixe $n+1$ et $n+2$. Notons $\tau = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 \end{pmatrix}$. On définit

$$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n \qquad \Psi(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \varepsilon(\sigma) = 1 \\ \sigma \circ \tau & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n \qquad \nu(\sigma) = \mathbb{1}_{\varepsilon^{-1}(\{-1\})}(\sigma)$$

Ainsi $$\forall \sigma \in \mathrm{S}_n \qquad \Psi(\sigma) = \sigma \circ \tau^{\nu(\sigma)}$$

L'application Ψ ainsi définie est clairement à valeurs dans $\mathcal{A}_{n+2}$. On observe l'égalité

$$\forall (\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2 \qquad \nu(\sigma) + \nu(\gamma) \equiv \nu(\sigma \circ \gamma) \ [2]$$

d'où $$\forall (\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2 \qquad \tau^{\nu(\sigma)+\nu(\gamma)} = \tau^{\nu(\sigma\circ\gamma)}$$

Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, les supports de τ et σ étant disjoints, ces permutations commutent. Il en résulte que Ψ est un morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \forall (\sigma, \gamma) \in \mathrm{S}_n^2 \qquad \Psi(\sigma \circ \gamma) &= \sigma \circ \gamma \circ \tau^{\nu(\sigma\circ\gamma)} = \sigma \circ \gamma \circ \tau^{\nu(\sigma)+\nu(\gamma)} \\ &= \sigma \circ \tau^{\nu(\sigma)} \circ \gamma \circ \tau^{\nu(\gamma)} = \Psi(\sigma) \circ \Psi(\gamma) \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$ tel que $\Psi(\sigma) = \mathrm{id}$. On a $\Psi(\sigma)(n+1) = n+1$ d'où $\varepsilon(\sigma) = 1$ puis $\sigma = \mathrm{id}$ ce qui prouve l'injectivité de Ψ. Comme G est isomorphe à un sous-groupe de S_n lui-même isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$ *via* le morphisme Ψ, on conclut

Le groupe G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_{n+2}$.