

Équations différentielles linéaires, calcul différentiel

Exercice 1.

1. En écrivant $\chi_A = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_j)^{m_j}$ (décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$), où $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$, le lemme de décomposition des noyaux donne la décomposition en sous-espaces caractéristiques :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^k \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}$$

Chaque $\text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}$ étant A -stable on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall x_j \in \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}, e^{tA} x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j I)} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j$$

En notant $\|\cdot\|$ une norme quelconque de $\mathbb{C}^n$ (de dimension finie), il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$\|e^{tA} x_j\| \leq e^{t\text{Re}(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j-1} \|x_j\| \leq C e^{t\text{Re}(\lambda_j)} (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\|$$

où $C_j \in \mathbb{R}_+$ et $C = \max_{1 \leq j \leq k} (C_j) \geq 0$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ (en décomposant x selon les sous-espaces caractéristiques) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|e^{tA} x\| \leq \sum_{j=1}^k \|e^{tA} x_j\| \leq C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^k e^{t\text{Re}(\lambda_j)} \right) \max_{1 \leq j \leq k} \|x_j\|$$

d'où l'inégalité demandée compte-tenu de l'équivalence des normes.

2. La solution du système linéarisé est $z : t \mapsto e^{tA} x$. D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de A , il existe $a > 0$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\text{Re}(\lambda_j) < a$. La question précédente permet d'obtenir :

$$\|z(t)\| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \|x\| e^{-at} O(1)$$

si bien que $z(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, l'origine est point d'équilibre attractif.

3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall t \geq 0, |(e^{tA} x | e^{tA} y)| \leq \|e^{tA} x\| \|e^{tA} y\| \leq K \|x\| \|y\| e^{-2at}$$

où $K \in \mathbb{R}_+$. Ceci garantit la convergence absolue de l'intégrale définissant b . Cette dernière est bilinéaire, symétrique et positive (vérification immédiate). Enfin, si $x \in \mathbb{R}^n$:

$$q(x) = b(x, x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA} x\|^2 dt = 0 \iff \text{fonction continue} \geq 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA} x\| = 0 \iff e^{tA} \text{ inversible} \iff x = 0$$

Donc q est définie positive.

4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$q(x + ty) = q(x) + 2tb(x, y) + t^2 q(y)$$

On dérive par rapport à t (polynôme) et on évalue en $t = 0$, ce qui donne :

$$dq(x) \cdot t = 2b(x, y)$$

En particulier :

$$(\nabla q(x) | Ax) = dq(x) \cdot Ax = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} \underbrace{2(e^{tA} x | e^{tA} Ax)}_{= \frac{d}{dt} \|e^{tA} x\|^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\|e^{TA} x\|^2 - \|e^{0A} x\|^2) = -\|x\|^2$$

5. On considère maintenant $y = y(t)$ et $y' = f(y) = Ay + r(y)$ et on calcule :

$$q(y)' = dq(y) \circ y' = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec b donne :

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)} \sqrt{q(r(y))}$$

Or $r(y) = f(y) - f(0) - df(0) \cdot y$, donc la définition de la différentielle donne : $r(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} o(y)$. Ainsi

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leq \alpha$, alors $\sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$.

Il s'ensuit que : $2b(y, r(y)) \leq 2\varepsilon q(y) \leq 2\varepsilon K \|y\|^2$ en utilisant l'équivalence des normes $\sqrt{q}$ et $\|\cdot\|$.

On pose alors $\beta = C - 2\varepsilon > 0$ (quitte à diminuer ε et α en conséquence), et on a alors :

$$q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

6. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $q(y(t)) > \alpha$. Comme cette inégalité n'est pas vérifiée en $t = 0$, comme $t \mapsto q(y(t))$ est continue, il existe $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \alpha$. Mais alors $q(y)'(t_0) \leq -\beta\alpha < 0$: au voisinage à gauche de t_0 on a $q(y(t)) > 0$, ce qui est absurde.

Ainsi : $q(y) < \alpha \implies \forall t \geq 0, q(y(t)) \leq \alpha$

On observe alors :

$$(e^{\beta t} q(y))' = e^{\beta t} (q(y)' + \beta q(y)) \leq 0$$

donc en primitivant avec la condition initiale $y(0) = x$ et en multipliant par $e^{-\beta t}$ il vient

$$\forall t \geq 0, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$$

Ainsi $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 comme la solution z du système linéarisé.

On énonce le théorème de Liapounov :

Soit le système différentiel :

$$y' = f(y), \quad y(0) = x$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = 0$. Si $df(0)$ a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exercice 2.

1. On sait que pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ reliant x à y , on a $f(x) - f(y) = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$.

On prend $\gamma : t \mapsto tx + (1-t)y$ (le chemin le plus simple). Alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), x - y \rangle dt + \langle \nabla f(y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

Mais, pour tout t dans $]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), x - y \rangle &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle \\ &= \frac{1}{t} \langle \nabla f(tx + (1-t)y) - \nabla f(y), tx + (1-t)y - y \rangle \\ &\geq \frac{1}{t} \alpha \|t(x - y)\|^2 \\ &\geq t\alpha \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Donc $f(x) - f(y) \geq \int_0^1 t\alpha \|x - y\|^2 dt + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$, soit $f(x) - f(y) \geq \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$

2. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$, t dans $[0, 1]$. Alors on applique l'inégalité précédente entre $tx + (1-t)y$ et x , puis entre $tx + (1-t)y$ et y . Ceci donne :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(tx + (1-t)y) + \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - (tx + (1-t)y) \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - (tx + (1-t)y)\|^2 \\ &\geq f(tx + (1-t)y) + (1-t) \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle + (1-t)^2 \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \\ f(y) &\geq f(tx + (1-t)y) + \langle \nabla f(tx + (1-t)y), y - (tx + (1-t)y) \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - (tx + (1-t)y)\|^2 \\ &\geq f(tx + (1-t)y) - t \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle + t^2 \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Soit, en faisant $tL_1 + (1-t)L_2$, on obtient l'inégalité désirée.

3. Déjà, $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ par théorème de comparaison.

Si $M = f(0)$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \leq M\}$ est un compact (fermé car f est continue et borné car $f \rightarrow +\infty$).

Sur ce compact, f atteint son minimum, inférieur à M , et en-dehors, f est plus grande que M . L'unicité du minimum vient du fait que si x et y sont deux points de minimum sur $\mathbb{R}^n$, alors $\nabla f(x)$ et $\nabla f(y)$ sont nuls. L'ellipticité assure alors que $x = y$.

4. (a)
(b) Essayons d'exprimer $x_{k+1} - x^*$ à l'aide de $x_k - x^*$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \rho \nabla f(x_k)\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\rho \langle x_k - x^*, \nabla f(x_k) \rangle + \rho^2 \|\nabla f(x_k)\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha\rho \|x_k - x^*\|^2 + \rho^2 M^2 \|x_k - x^*\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2) \|x_k - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $\rho < \frac{2\alpha}{M}$ pour avoir $0 \leq 1 - 2\alpha\rho + M^2\rho^2 < 1$ et avoir convergence géométrique.

Exercice 3.

1. Soient f radiale et harmonique, φ telle que pour tous x et y , $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = f(\sqrt{t}, 0)$, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant $\Delta f = 0$, on obtient : $\forall r > 0$, $\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) = 0$.

On en déduit $\varphi : r \mapsto A \ln(r) + B$, donc $f : (x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : si f est aussi définie et continue en $(0, 0)$, alors f est constante.

2. (a) Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0 + t, y_0)$. Cette fonction admet un maximum sur un intervalle ouvert en $t = 0$, donc $g''(0) \leq 0$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$. Idem pour y .
(b) Déjà, f_p atteint bien son maximum sur D car continue sur un compact. Ensuite, si le maximum est atteint à l'intérieur, on a $\Delta f_p \leq 0$. Or, $\Delta f_p = \Delta f + \frac{4}{p} > 0$. Donc le maximum de f_p est atteint sur C .

Soit p dans $\mathbb{N}^*$, $z_p = (x_p, y_p)$ un point de C en lequel f_p atteint son maximum M_p . Comme C est compact, on dispose d'une extraction φ telle que $(z_{\varphi(p)})$ converge. Par passage à la limite grâce à la continuité, on montre que sa limite est un point $z^* \in C$ pour lequel f atteint son maximum. Donc le maximum de f est bien atteint sur C .

- (c) Soient f et g harmoniques, telles que $f = g$ sur un cercle C . On note D le disque délimité par C . Alors $f - g$ est harmonique et donc atteint son maximum sur D sur C , qui est nul, donc $f - g \leq 0$ sur D . De même, $g - f \leq 0$, donc $f = g$.

Cela signifie qu'une application harmonique est entièrement déterminée par sa valeur au bord d'un domaine : c'est ce que vous utilisez en physique pour résoudre l'équation de Poisson.