

Feuille de révisions n°1

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer J^k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
2. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser son spectre.
3. En déduire $\det A$.

Exercice 3 (**)

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I est elle-même uniformément continue.

Exercice 4 (**)

On pose $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad S_{n,k} = \text{Card} \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = k \right\}$

1. Préciser $S_{1,k}$ puis justifier $S_{n,k} = \sum_{i=0}^k S_{n-1,k-i}$
2. Déterminer un majorant simple de $S_{n,k}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum S_{n,k} x^k$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{1,k} x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{2,k} x^k$ puis conjecturer une formule pour $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k$ que l'on démontrera.
4. En déduire une expression de $S_{n,k}$.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. Établir $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ et les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ presque nulles. On pose

$$\forall P \in E \quad \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad H = \text{Ker } \varphi$$

Comparer $\bar{H}$ et $(H^\perp)^\perp$.

Exercice 7 (****)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : X \rightarrow X$ telle que

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

1. Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

3. Montrer que f est une bijection de X sur X .

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour n entier.

1. Préciser $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$ pour n entier.
2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(|S_n|) \leq \sqrt{n}$$
3. Montrer
$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$$

On utilisera la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

4. En déduire une expression simple de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ puis un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 (**)

On pose pour n entier non nul et $x > 0$

$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$ avec $\Gamma(x) > 0$.

2. Montrer
$$\forall x > 0 \quad I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$$

3. Établir
$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad I_n(x) = \frac{n^x u_n(x)}{x}$$

4. Montrer
$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{4^x} \Gamma(2x)$$