

Feuille de révisions n°2

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\text{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Exercice 2 (***)

On pose
$$\forall x > -1 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right]$$

1. Montrer que S est définie, continue sur $I =]-1; +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de S .
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Calculer $S(n)$ pour n entier.
5. En déduire un équivalent simple de $S(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et une matrice $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leq n$ telle que $G = A^T A$.
2. Justifier l'égalité $\forall M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \text{rg}(M^T M) = \text{rg}(M)$
3. En déduire une relation entre $\text{rg}(G)$ et $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 4 (**)

Soit $a > 0$. Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\text{sh}((2n+1)a)}$$

Exercice 5 (***)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T M = M M^T$ et $M^2 = -I_n$

Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ puis caractériser M .

Exercice 6 (**)

Pour $x \geq 0$, on pose
$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Justifier que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer un équivalent de $\Phi(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
2. Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$ et calculer cette intégrale.

Exercice 7 (***)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n \sqrt[n]{1+t^n}}$$

Justifier que pour n entier non nul, l'intégrale définissant I_n est convergente puis étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 8 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. On pose

$$X = \{x \in E \mid \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$$

Montrer que X est compact si et seulement si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Exercice 9 (****)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 1 mais pas d'ordre 2. On se propose de démontrer que la loi faible des grands nombres a toujours lieu.

Pour k et n entiers non nuls, on pose

$$Y_{k,n} = X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq n\}} \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad T_n = \sum_{k=1}^n Y_{k,n}$$

1. Montrer
$$\frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leq n \mathbb{P}(|X_1| > n)$$
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer
$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} + n \mathbb{P}(|X_1| > n)$$
4. Soit X variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. Montrer

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(X^2 \mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

5. Démontrer la loi faible des grands nombres pour la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.