

Feuille de révisions n°3

Exercice 1 (*)

Soient $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i=1}^n P_i \mathbb{K}[X]$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. On appelle *plus petit commun multiple* des P_i le polynôme unitaire ou nul noté $P_1 \vee \dots \vee P_n$ engendrant cet idéal.
2. Justifier que le ppcm des P_i est multiple de chacun des P_i et montrer pour $P \in \mathbb{K}[X]$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P_i | P \implies P_1 \vee \dots \vee P_n | P$$

Exercice 2 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$ et $A_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Déterminer χ_A en fonction des χ_{A_i} et π_A en fonction des π_{A_i} .

Exercice 3 (***)

Soit n entier ≥ 2 . Pour $\sigma \in S_n$, on pose $M_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application définie par

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

avec $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\sigma \in S_n$. Que représente M_σ pour l'endomorphisme f_σ ? Justifier que la matrice M_σ est orthogonale.
2. Soit $(\sigma, \gamma) \in S_n^2$. Déterminer le produit $M_\sigma M_\gamma$.
3. Soit $\gamma = (1 \dots n)$. Déterminer $J = M_\gamma$ puis χ_J et π_J .
4. Soit $c \in S_n$ un cycle de longueur n . Justifier que les matrices M_c et J sont semblables.
5. Soit $\sigma \in S_n$ avec $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer χ_{M_σ} et π_{M_σ} en fonction des ℓ_i avec $o(c_i) = \ell_i$ pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Exercice 4 (***)

Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$ est bien définie puis la calculer.

Exercice 5 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$. Montrer

$$\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}$$

Exercice 6 (****)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, U ouvert borné non vide de E , $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et f continue sur $\bar{U}$. On définit le *laplacien* de f sur U noté Δf par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{ou} \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)$$

1. Justifier que f admet un maximum en un point $x_0 \in \bar{U}$.
2. On suppose $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Montrer

$$x_0 \in \partial U \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier l'existence d'un $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ et considérer $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ avec e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

On suppose désormais que f est *harmonique* sur U , i.e. $\Delta f = 0$. On pose

$$\forall \varepsilon > 0 \quad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

3. Montrer que g_ε est continue sur $\bar{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que

$$\forall x \in U \quad \Delta g_\varepsilon(x) > 0$$

4. En déduire
$$\forall x \in U \quad f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose
$$\forall \omega \in \Omega \quad S_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

1. Justifier que S_N est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que S_N est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
4. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S_N .
5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $\text{Tr}(u) = \dim E$. Déterminer u .

Exercice 9 (**)

Soit E euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f .

1. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.
2. Montrer que si une des inégalités est une égalité avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre.
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Montrer
$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_i) = \lambda_i e_i$$