

Feuille de révisions n°1

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

Corrigé : Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. On a

$$t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = -2t \ln(t) + t \ln(1 + t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t^2} dt$ sont de même nature. La seconde étant clairement convergente, on en déduit

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Ainsi

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \text{ converge et vaut } \pi.$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier non nul, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des complexes et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer J^k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
2. Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser son spectre.
3. En déduire $\det A$.

Corrigé : 1. On voit aisément que J^k est la matrice dont les colonnes ont été permutées de manière cyclique k fois vers la droite. Pour le démontrer, notons M_σ avec $\sigma \in S_n$ la *matrice de permutation* définie par

$$M_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Soit $(\sigma, \gamma) \in S_n^2$. On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (M_\sigma \times M_\gamma)_{i, j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \gamma(j)} = \delta_{i, \sigma(\gamma(j))} = \delta_{i, \sigma \circ \gamma(j)}$$

Soit c le cycle $c = (n \ n-1 \ \dots \ 1)$. On a $J = M_c$ et par une récurrence immédiate

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad J^k = M_{c^k}}$$

Remarque : En particulier, on a $c^n = \text{id}$ et $J^n = I_n$.

2. La matrice J est une matrice compagne mais simplement en développant selon la dernière ligne, on trouve

$$\chi_J = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Ainsi, la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet n valeurs propres distinctes et par condition suffisante, on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } J \text{ est diagonalisable.}}$$

3. On observe

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}JP = \text{diag}(\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Il vient

$$P^{-1}AP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{0 \times k}, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{(n-1)k} \right)$$

On conclut

$$\boxed{\det A = \prod_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{\ell k}}$$

Remarque : La matrice A est appelée *matrice circulante* et son déterminant est dit *circulant*.

Exercice 3 (**)

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I est elle-même uniformément continue.

Corrigé : Soit $(x, y) \in I^2$. Pour n entier, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier n tel que $|f_n(u) - f(u)| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in I$ puis $\eta > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$ pour $|x - y| \leq \eta$. Ainsi

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\text{Une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.}}$$

Exercice 4 (**)

On pose $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad S_{n,k} = \text{Card} \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = k \right\}$

1. Préciser $S_{1,k}$ puis justifier $S_{n,k} = \sum_{i=0}^k S_{n-1,k-i}$
2. Déterminer un majorant simple de $S_{n,k}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum S_{n,k} x^k$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{1,k} x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{2,k} x^k$ puis conjecturer une formule pour $\sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k$ que l'on démontrera.
4. En déduire une expression de $S_{n,k}$.

Corrigé : 1. On a $S_{1,k} = \text{Card} \{i_1 \in \mathbb{N} \mid i_1 = k\} = \{k\}$

D'où $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad S_{1,k} = 1}$

Puis

$$\left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = k \right\} = \bigsqcup_{i_n=0}^k \left\{ (i_1, \dots, i_{n-1}, i_n), (i_1, \dots, i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} i_j = k - i_n \right\}$$

Comme il s'agit d'une union disjointe, considérant les cardinaux, on trouve

$$\boxed{S_{n,k} = \sum_{i=0}^k S_{n-1,k-i}}$$

2. Soit $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n i_j = k$. On a donc

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad 0 \leq i_j \leq k$$

d'où $\Lambda_{n,k} = \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n i_j = k \right\} \subset \llbracket 0; k \rrbracket^n$

Ainsi $\boxed{S_{n,k} \leq \text{Card} \llbracket 0; k \rrbracket^n = (k+1)^n}$

On a également $S_{n,k} \geq 1$ puisque le n -uplet $(k, 0, \dots, 0)$ appartient à $\Lambda_{n,k}$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq S_{n,k} \leq (k+1)^n$$

Notons R le rayon de convergence de $\sum S_{n,k} x^k$, R_1 celui de $\sum x^k$ et R_2 celui de $\sum (k+1)^n x^k$.

On a $\forall k \in \mathbb{N} \quad R_1 \geq R \geq R_2$

Par ailleurs, on clairement $R_1 = 1$ (série de référence) et l'équivalent $(k+1)^n \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k^n$ fournit $R_2 = 1$. On conclut

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum S_{n,k} x^k \text{ est } R = 1.}$$

3. On a

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{1,k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

Avec la relation établie à la première question, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad S_{2,k} = \sum_{i=0}^k S_{1,k-i} = \sum_{i=0}^k 1 = k+1$$

Par suite, avec un changement d'indice et par dérivation d'une série entière,

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{2,k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right]$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{2,k} x^k = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

On peut alors conjecturer la formule suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Montrons ce résultat par récurrence. On pose

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

• **Initialisation** $\mathcal{P}(1)$: La propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie (voir ci-avant).

• **Hérédité** $\mathcal{P}(n-1) \implies \mathcal{P}(n)$: Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour $n-1 \geq 1$ fixé. Avec la relation admise dans l'énoncé, il vient

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k S_{n-1,k-i} \right) x^k$$

D'après le théorème du produit de Cauchy appliqué aux séries entières $\sum x^k$ et $\sum S_{n-1,k} x^k$ dont les rayons de convergences sont tous deux égaux à 1, il vient

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k S_{n-1,k-i} \right) x^k &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} S_{n-1,k} x^k \right) \\ &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in]-1; 1[\quad \sum_{k=0}^{+\infty} S_{n,k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}}$$

4. Par dérivation d'une série entière, on a pour $x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\frac{1}{1-x} \right] &= \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right] \\ &= \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+2) x^{k-(n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!} x^k \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\boxed{\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad S_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Variante : On peut répondre à cette dernière question uniquement avec des arguments combinatoires. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On remarque

$$S_{n,k} = \text{Card} \left\{ (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n (i_j + 1) = k + n \right\}$$

L'intérêt de cette écriture est d'avoir des composantes toutes non nulles dans le n -uplet $(i_1 + 1, \dots, i_n + 1)$. En écrivant

$$n + k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{n+k \text{ termes}}$$

le problème équivaut à choisir $n - 1$ signes $+$ parmi les $n + k - 1$ signes $+$ afin d'isoler n paquets qui formeront le n -uplet

$$n + k = \underbrace{1 + \dots + 1}_{i_1+1} \oplus \underbrace{1 + \dots + 1}_{i_2+1} \oplus \dots \oplus \underbrace{1 + \dots + 1}_{i_n+1}$$

On a donc $\binom{n+k-1}{n-1}$ choix possibles et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 5 (**)

Soit E euclidien de dimension n entier non nul, $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

1. Établir
$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|$$

2. Étudier le cas d'égalité.

Corrigé : 1. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie. Supposons $(x_1, \dots, x_n)$ libre et soit $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_n)$ la base orthonormée obtenue par l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $(x_1, \dots, x_n)$. On note $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{L}$. On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \text{mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{L} \times \text{mat}_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$$

La matrice P est matrice de passage entre deux bases orthonormées de E d'où $P \in \mathcal{O}(n)$. Par suite

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(P) \det_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n) = \pm \det_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n)$$

et
$$\text{mat}_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_j, v_i \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$$

Or, on a
$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$$

d'où
$$\forall j > i \quad \langle x_j, v_i \rangle = 0$$

en le voyant soit par orthogonalité, soit parce que x_j est combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_j)$ d'où la nullité des coefficients en v_i pour $i > j$. Ainsi

$$\text{mat}_{\mathcal{L}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, v_1 \rangle & \dots & \dots & \langle x_n, v_1 \rangle \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle x_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| = \prod_{k=1}^n |\langle x_k, v_k \rangle|$$

et
$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \|x_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x_k, v_i \rangle^2} \geq |\langle x_k, v_k \rangle|$$

Finalement
$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|$$

Remarque : Il s'agit de *l'inégalité d'Hadamard*.

2. Supposons $(x_1, \dots, x_n)$ liée. L'inégalité est une égalité si et seulement si un des x_i est nul. Supposons ensuite $(x_1, \dots, x_n)$ libre. L'inégalité est une égalité si et seulement

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \|x_k\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_k, v_i \rangle^2 = \langle x_k, v_k \rangle^2$$

c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_k \in \text{Vect}(v_k)$

autrement dit $(x_1, \dots, x_n)$ famille orthogonale

On conclut

L'inégalité est une égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ orthogonale ou l'un des x_i est nul.

Exercice 6 (***)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ avec $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ et les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ presque nulles. On pose

$$\forall P \in E \quad \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad H = \text{Ker } \varphi$$

Comparer $\bar{H}$ et $(H^\perp)^\perp$.

Corrigé : Soit $P \in E$ avec $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ où N est un entier et $Q = \sum_{n=0}^N \frac{X^n}{2^n}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\varphi(P)| = \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2^n} \right| = |\langle P, Q \rangle| \leq \|P\| \|Q\| \leq \|P\| \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{4^n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où
$$|\varphi(P)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \|P\|$$

On en déduit la continuité de la forme linéaire φ d'où la fermeture de $H = \text{Ker } \varphi$. Puis, on suppose $P \in H^\perp$ et on pose $R = P - 2^{N+1} \varphi(P) X^{N+1}$. On a

$$\varphi(R) = \varphi(P) - 2^{N+1} \varphi(P) \varphi(X^{N+1}) = \varphi(P) - \varphi(P) = 0$$

ce qui prouve $R \in H = \text{Ker } \varphi$ d'où $\langle P, R \rangle = 0$. Puis, on trouve

$$\langle P, R \rangle = \langle P, P - 2^{N+1} \varphi(P) X^{N+1} \rangle = \|P\|^2 - 2^{N+1} \varphi(P) \underbrace{\langle P, X^{N+1} \rangle}_{=0} = \|P\|^2$$

On en déduit $P = 0_E$ et ceci pour tout $P \in H^\perp$ ce qui prouve $H^\perp = \{0_E\}$. On conclut

$$\bar{H} = H \subsetneq E = \{0_E\}^\perp = (H^\perp)^\perp$$

Variante : Soit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in H^\perp$. On a clairement $(X-2)X^k \in H$ pour tout k entier d'où

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \langle P, (X-2)X^k \rangle = \langle P, X^{k+1} \rangle - 2 \langle P, X^k \rangle = a_{k+1} - 2a_k = 0$$

Si P est non nul, notant N son degré, on en déduit $a_N = \frac{1}{2} a_{N+1} = 0$ ce qui est absurde d'où $P = 0_E$.

Remarque : Soit $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ avec N entier. Ainsi, on a $X^{N+1} \perp P$ d'où $\text{Vect}(X^{N+1}) \subset \{P\}^\perp$. Par ailleurs, on a $E = H \oplus \text{Vect}(X^{N+1})$ et le polynôme P se décompose donc de manière unique

$P = P_1 + P_2$ avec $(P_1, P_2) \in H \times \text{Vect}(X^{N+1})$ qu'on détermine par analyse/synthèse. Dans ce qui précède, on a choisi précisément $R = P_1$ et ce choix garantit

$$\|P\|^2 = \langle P, P_1 + P_2 \rangle = \langle P, P_1 \rangle$$

Avec la contrainte $P \in H^\perp$, le résultat s'impose de lui-même.

Exercice 7 (****)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : X \rightarrow X$ telle que

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$$

1. Soit $a \in X$. Montrer que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que f est une isométrie, *i.e.*

$$\forall (x, y) \in X^2 \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

3. Montrer que f est une bijection de X sur X .

Corrigé : 1. Par récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad \|x - y\| \leq \|f^k(x) - f^k(y)\|$$

d'où $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \|u_n - u_0\| \leq \|f^k(u_n) - f^k(u_0)\| = \|u_{n+k} - u_k\|$

La suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans X compact donc il existe φ une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge dans X . On définit ψ sur $\mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \psi(n+1) = \min \{ \varphi(k), k > 2\psi(n) \}$$

D'après le résultat préliminaire, pour n entier

$$\|u_{\psi(n+1)-\psi(n)} - u_0\| \leq \|u_{\psi(n+1)} - u_{\psi(n)}\|$$

Il s'ensuit

$$u_{\psi(n+1)-\psi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Enfin, par construction, on a $\psi(n+1) > 2\psi(n)$ pour n entier d'où

$$\psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) > \psi(n) \leq 0$$

ce qui prouve la stricte croissance de $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ qui est donc une extractrice. Ainsi

$$\boxed{\text{La valeur } a \text{ est valeur d'adhérence de } (u_n)_n.}$$

Remarque : L'extractrice $\psi(\cdot + 1) - \psi$ est complètement déterminée par le choix de φ .

2. Soit $(a, b) \in X^2$. On construit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ comme précédemment. L'espace X^2 est compact comme produit d'espaces compacts. Ainsi, la suite $(u_n, v_n)_n$ admet une valeur d'adhérence et avec le même procédé que celui vu précédemment, on construit une extractrice χ telle que

$$u_{\chi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \quad \text{et} \quad v_{\chi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$$

Par ailleurs, comme $\chi(n) \geq 1$ pour tout entier $n \geq 1$, il vient

$$\forall n \geq 1 \quad \|f(a) - f(b)\| \leq \|f^{\chi(n)-1}(f(a)) - f^{\chi(n)}(f(b))\| = \|u_{\chi(n)} - v_{\chi(n)}\|$$

Faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\|f(a) - f(b)\| \leq \|a - b\|$ et l'autre inégalité est vraie par hypothèse. Ainsi, on conclut que

L'application f est une isométrie.

3. Comme f est une isométrie, elle est injective et continue. Comme X est compact, l'ensemble $f(X)$ est compact. D'après le résultat de la première question, on a $X \subset \overline{f(X)}$ et comme $f(X)$ est compact donc fermé, il s'ensuit que $X \subset f(X) = \overline{f(X)}$. L'autre inclusion étant vraie par hypothèse, on a $f(X) = X$ et on conclut

L'application f est une bijection de X sur X .

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour n entier.

1. Préciser $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$ pour n entier.

2. Établir $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(|S_n|) \leq \sqrt{n}$

3. Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$

On utilisera la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

4. En déduire une expression simple de $\mathbb{E}(|S_{2n}|)$ puis un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. La variable aléatoire S_n est finie donc admet un moment d'ordre un et deux. Par linéarité de l'espérance et égalité en loi, il vient

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1)$$

et par indépendance des X_i et égalité en loi

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = n\mathbb{V}(X_1)$$

On trouve sans difficulté $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{V}(X_1) = 1$ et on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(S_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = n$$

2. Soit n entier. La variable aléatoire $|S_n|$ est finie donc admet un moment d'ordre deux. D'après la relation de König-Huyngens, il vient

$$\mathbb{V}(|S_n|) = \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(|S_n|)^2$$

Par positivité de la variance, on obtient

$$\mathbb{E}(|S_n|)^2 \leq \mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{V}(S_n) = n$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(|S_n|) \leq \sqrt{n}$$

Remarque : On peut programmer le calcul récursif de $\mathbb{E}(|S_n|)$ pour n entier. On constate que la majoration semble assez fine, ce que la suite de l'exercice va confirmer.

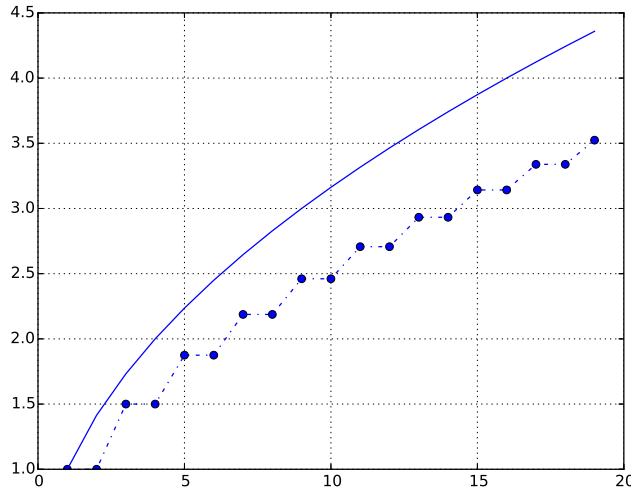


FIGURE 1 – Tracé des suites $(\mathbb{E}(|S_n|))_n$ et $(\sqrt{n})_n$

3. L'égalité est vraie pour $k = n$ puis

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} &= \frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k)!} - \frac{(2n-1)!}{(n+k)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{1}{2n} \left[(n+k) \binom{2n}{n+k} - (n-k) \binom{2n}{n+k} \right] \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}}$$

4. Soit n entier non nul. On constate

$$\frac{n + S_n}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{1 + X_i}{2} \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$$

comme somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $1/2$. On en déduit

$$\forall k \in \llbracket -n; n \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} & \text{si } n+k \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par transfert et manipulation sur la somme, on trouve

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \sum_{k=-n}^n |2k| \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^n 2k \binom{2n}{n+k}$$

Puis, par télescopage

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{4n}{4^n} \sum_{k=0}^n \frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} = \frac{4n}{4^n} \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right] = \frac{4n}{4^n} \binom{2n-1}{n-1}$$

Un dernier arrangement et l'équivalent de Stirling permet de conclure

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(|S_{2n}|) = \frac{2n \binom{2n}{n}}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}}$$

Exercice 9 (**)

On pose pour n entier non nul et $x > 0$

$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$ avec $\Gamma(x) > 0$.

2. Montrer $\forall x > 0 \quad I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$

3. Établir $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad I_n(x) = \frac{n^x u_n(x)}{x}$

4. Montrer $\forall x > 0 \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{4^x} \Gamma(2x)$

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $f : t \mapsto t^x e^{-t} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ avec

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{t^{1-x}}\right) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi, la fonction f intégrable sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$. De plus, l'intégrande f est continue et strictement positive sur $]0; +\infty[$ d'où par séparation

La fonction Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$ avec $\Gamma(x) > 0$ pour $x > 0$.

2. On pose $\forall (t, n) \in]0; +\infty[\times \mathbb{N}^* \quad f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]0; n[}(t)$

Clairement $\forall t > 0 \quad f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t^{x-1} e^{-t}$

Avec l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$, on obtient

$$\forall (t, n) \in]0; +\infty[\times \mathbb{N}^* \quad 0 \leq f_n(t) = t^{x-1} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \mathbb{1}_{]0; n[}(t) \leq t^{x-1} e^{-t}$$

Par convergence dominée

$\forall x > 0 \quad I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$

3. Avec le changement de variables $t = nu$, on obtient

$$\forall x > 0 \quad I_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

Après n intégrations par parties, il vient

$$\int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{u_n(x)}{x}$$

Par conséquent

$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad I_n(x) = \frac{n^x u_n(x)}{x}$

4. Soit $x > 0$. On a $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x 2^{n+1}}{\prod_{k=0}^n (2x+2k)}$

et
$$\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x\sqrt{n}}{\prod_{k=0}^n \left(x + \frac{1}{2} + k\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x\sqrt{n}2^{n+1}}{\prod_{k=0}^n (2x + 2k + 1)}$$

Ainsi
$$\frac{(n!)^2 2^{2n+2} n^{2x} \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{2n+1} (2x + k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, il vient en considérant la suite extraite d'indice pair

$$\Gamma(2x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^{2x}}{\prod_{k=0}^n (2x + k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!(2n)^{2x}}{\prod_{k=0}^{2n} (2x + k)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!(2n)^{2x}}{\prod_{k=0}^{2n} (2x + k)} \times \frac{\prod_{k=0}^{2n+1} (2x + k)}{(n!)^2 2^{2n+2} n^{2x} \sqrt{n}} &= \frac{(2n)! 4^x (2x + 2n + 1)}{(n!)^2 2^{2n+2} \sqrt{n}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} 4^x (2x + 2n + 1)}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n 2^{2n+2} \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4^x}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

et par unicité de la limite, on obtient

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4^x}{2\sqrt{\pi}}$$

On conclut

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{4^x} \Gamma(2x)$$