

Endomorphismes échangeurs

Durée prévue : 3 h

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbf{C}$, le corps des nombres complexes, pour corps de base.

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbf{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F.$$

Étant donné deux endomorphismes u et v de E , on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v .

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E . On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

- (C1) L'endomorphisme u est échangeur.
- (C2) Il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$.
- (C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties **A** et **B** est indépendante des autres. Les résultats de la partie **D** sont essentiels au traitement des parties **E** et **F**.

A Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme u de E .

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det u$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 \text{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres de u .
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u , une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$, et en déduire que u est échangeur.

B La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \text{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et $B \in \text{M}_{n,p}(\mathbf{C})$. On considère dans $\text{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice

$$M := \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}.$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$ de $\text{M}_{n+p}(\mathbf{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
5. On considère dans $\text{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}.$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis $DM D^{-1}$, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur, et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.

On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G . La famille $\mathbf{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E .

Compte tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de u dans $\mathbf{B}$.

7. Dédire des questions précédentes que u vérifie les conditions (C2) et (C3).
On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F et G est nul.

C La condition (C2) implique la condition (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un *automorphisme* d'un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\text{Ker } f$ à $\text{Im } f$ et en déduire

$$\dim \text{Ker } f \geq \frac{\dim E}{2}.$$

9. Démontrer que $E = \text{Ker } a \oplus \text{Ker } b$, et que $\text{Ker } a = \text{Im } a$ et $\text{Ker } b = \text{Im } b$.

10. En déduire que u est échangeur.

D Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E . On se donne un nombre complexe λ arbitraire. On pose $v := f - \lambda \text{I}_E$.

11. Montrer que la suite $(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p, \text{Ker } v^k = \text{Ker } v^p.$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\text{Ker } v^k$ pour k dans $\mathbf{N}$.

Montrer qu'alors

$$\text{Ker } v^p = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \text{Ker } v^k$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question **12** et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) := \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \text{Ker } v^k = \text{Ker } v^p.$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

13. Montrer que $E_\lambda^c(f) = \text{Ker}(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \text{Im}(v^p).$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\text{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f .

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}(v^p)$. Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.
15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ . On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ .
Montrer que $\text{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$, puis que $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$.
On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im}(v^p)$.