

Commentaires - Devoir surveillé n°6

Il faut respecter la numérotation des questions. Les thèmes abordés sont très classiques et la plupart des aspects techniques avaient été vus, d'une manière ou d'une autre, en classe.

1 Questions préliminaires

1. Certains détaillent en long en large la propriété $AB^k = B^kA$ pour k entier mais expédient sans argumentation l'égalité $A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} AB^k$ alors qu'il faut mentionner la continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie ou à coordonnées polynomiales).
2. Pour t réel, il faut justifier la commutation de $e^{t(A+B)}$ avec B lors du calcul de g' . Il faut également souligner qu'on s'appuie sur l'unicité du théorème de Cauchy linéaire pour conclure.
3. La commutation entre matrices n'a pas lieu *a priori*. Plusieurs parviennent à dériver correctement et sont bloqués car ils ne pensent pas à évaluer en zéro : c'est un peu décourageant.
4. Il faut détailler en invoquant l'inégalité triangulaire classique, en montrant par récurrence $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k entier et conclure en invoquant la continuité de la norme qui est 1-lipschitzienne.
5. Très classique, vu plusieurs fois mais certains ont échoué malgré tout. Si on indexe la trigonalisation par $\lambda \in \text{Sp}(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il faut tenir compte des occurrences sur la diagonale et donc des multiplicités.

2 Formule de Trotter-Kato

6. OK.
7. Peu réussie alors qu'un simple recours au théorème de Taylor-Young appliqué à $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ suffisait. Les résultats de familles sommables à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont été systématiquement refusés : dans le cadre du programme, les familles sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
8. La relation de Bernoulli n'est pas utilisable car on n'a pas commutation *a priori*. Néanmoins, l'identité se prouve en suivant le même schéma, avec un télescopage. Le passage à la limite s'obtenait sans trop de difficulté, en prenant le temps d'écrire en détail les différentes majorations.

3 Vers les algèbres de Lie

9. Plutôt bien réussie. Il faut détailler et justifier des équivalences comme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{t \text{Tr}(M)} = 1 \iff \text{Tr}(M) = 0$$

en précisant notamment l'injectivité de l'exponentielle. Certains se sabordent en écrivant des « donc » au lieu de « si et seulement si ».

10. Réussite mitigée. En général, une matrice ne commute pas avec sa transposée. De plus, l'exponentielle n'est pas injective sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (considérer $\exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \{0, 2\pi\}$ par exemple).

11. Certains ne savent pas qu'il faut vérifier $0 \in \mathcal{A}_G$. Que faire ... ? Bien réussie pour les autres.

12. Peu réussie. Il faut interpréter les matrices exponentielles à droite et à gauche comme matrices de passage.

13. Très peu réussie. Certains ont réussi à extraire le crochet de Lie mais il faut également justifier la stabilité de $\mathcal{A}_G$ pour la dérivation (fermeture d'un sev de dimension finie).

14. OK.

15. Pas très bien réussie, à reprendre pour un grand nombre.

16. Certains qui ont échoué à la question précédente parviennent à se racheter ici. Néanmoins, la question est très peu traitée alors qu'elle a été vue en TD.

17. Seulement quelques réponses partielles.

4 Comportement asymptotique

18. Question très mal réussie et notamment la partie réduction. La discussion asymptotique a été globalement saccagée. À reprendre !

19. Pas très bien réussie bien que les arguments requis soient très classiques : trigonalisation, continuité du produit matriciel.

20. Carnage : il s'agissait d'invoquer le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux ! Des arguments hautement exotiques donc ...

21. Question réussie dans cinq copies seulement ! Alors que le procédé a été vu maintes et maintes fois.

22. Il faut évoquer la commutation pour utiliser la relation fondamentale de l'exponentielle matricielle puis considérer la norme de e^{tA} avec t réel pour finaliser proprement l'étude.

23. Immédiat en citant le théorème des croissances comparées. Très peu réussie, ce n'est pas normal.

24. Réussie nulle part.

25. La question démarre par l'utilisation de Cayley-Hamilton et du lemme de noyaux ce que certains ont vu. La suite était plus technique.

26. Non traitée.