

Feuille de révisions n°4

Exercice 1 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $u(K) \subset K$. On note $C = (\text{id} - u)(K)$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\text{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in K$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K .

Exercice 2 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec $B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit $z_1, \dots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Exercice 3 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. Établir $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$
2. Soit p entier et R le rayon de convergence de $\sum \frac{S_{p,n}}{n!} z^n$. Justifier $R = +\infty$.
3. Déterminer une expression sommatoire de $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v .

Exercice 5 (**)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ en fonction des paramètres α et β réels.

Exercice 6 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geq 2 \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

Exercice 7 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
3. Pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
4. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à M .

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Sp}(M) \subset i\mathbb{R}$.
2. Montrer $\mathrm{Ker} f \perp \mathrm{Im} f$. En déduire $g = f_{\mathrm{Im} f} \in \mathrm{GL}(\mathrm{Im} f)$ et $\mathrm{rg} M$ pair.
3. Montrer que g^2 diagonalisable.

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Exercice 10 (***)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour n entier, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ avec la convention $S_0 = 0$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On pose

$$T = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On note $q_n = \mathbb{P}(T = n)$ pour n entier non nul et $q_0 = 0$.

1. Soit n entier non nul. Déterminer la loi de S_n . On pourra poser $Y_k = \frac{1 + X_k}{2}$ pour tout k entier nul ou non.
2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{2n} = \sum_{k=0}^n q_{2k} p_{2(n-k)}$$
3. Justifier que les séries entières $\sum p_n t^n$ et $\sum q_n t^n$ admettent des rayons de convergence ≥ 1 . On note respectivement f et g leurs sommes sur $] -1; 1[$.
4. Montrer
$$\forall t \in] -1; 1[\quad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$
5. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ sur $] -1; 1[$. Les coefficients du développement devront être exprimés en fonction du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ avec n entier.
6. En déduire une expression de $f(t)$ pour $t \in] -1; 1[$ puis une expression de q_n pour n entier non nul.