

Feuille de révisions n°2

Exercice 1 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\text{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \text{Tr}(M)A - \text{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\text{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Corrigé : 1. On a φ à valeurs dans E et φ linéaire par bilinéarité du produit et de la trace d'où

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E)}$$

2. Soit $M \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$. On a

$$\varphi(M) = \lambda M \iff \text{Tr}(M)A = (\lambda + \text{Tr}(A))M$$

Si $\lambda = -\text{Tr}(A)$, on trouve $\varphi(M) = \lambda M \iff M \in \text{Ker Tr}$

ce qui prouve $-\text{Tr}(A) \in \text{Sp}(\varphi)$ et $E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \text{Ker Tr}$. Si $\lambda \neq -\text{Tr}(A)$, on a $M \in \text{Vect}(A)$ autrement dit $E_\lambda \subset \text{Vect}(A)$. On trouve $\varphi(A) = 0$ d'où $\text{Vect}(A) \subset E_0(\varphi)$ et comme $0 \neq -\text{Tr}(A)$, on a $E_0(\varphi) \subset \text{Vect}(A)$. Ainsi

$$\text{Sp}(\varphi) = \{0, -\text{Tr}(A)\} \quad \text{et} \quad E_0(\varphi) = \text{Vect}(A) \quad \text{et} \quad E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \text{Ker Tr}$$

On a $\dim E_0(\varphi) + \dim E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi) = \dim E$ ce qui prouve la diagonalisabilité de φ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E = E_0(\varphi) \oplus E_{-\text{Tr}(A)}(\varphi)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -\text{Tr}(A)I_{n^2-1} \end{array} \right)$. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et } \det \varphi = 0, \text{Tr } \varphi = -(n^2 - 1) \text{Tr}(A).}$$

Exercice 2 (***)

On pose $\forall x > -1 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right]$

1. Montrer que S est définie, continue sur $I =]-1; +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de S .
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.
4. Calculer $S(n)$ pour n entier.
5. En déduire un équivalent simple de $S(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times I \quad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

Soit $x > -1$. On a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ce qui prouve que S est bien définie sur I . Soit $a \in]-1; 0]$ et $b \geq 1$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{b}{n(n+a)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme tout segment de I est inclus dans un segment $[a; b]$ avec a et b choisis comme précédemment, il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de fonctions continues converge normalement donc uniformément sur tout segment de I et par conséquent

La fonction S est définie, continue sur I .

2. La fonction S est une somme (infinie) de fonctions croissantes d'où

La fonction S croît.

3. Par linéarité du symbole somme (car convergence), il vient pour $x \in I$

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right]$$

Par télescopage, on conclut

$$\forall x \in I \quad S(x+1) - S(x) = \frac{1}{x+1}$$

4. Soit n entier. On a

$$S(n) = S(0) + \sum_{k=0}^{n-1} [S(k+1) - S(k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

5. Par comparaison série/intégrale, on a

$$S(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

Enfin, par croissance de S , on a

$$\forall x \geq 0 \quad S(\lfloor x \rfloor + 1) \geq S(x) \geq S(\lfloor x \rfloor)$$

et

$$\ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui implique

$$\ln(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x) \quad \text{et} \quad \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

On conclut

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

Exercice 3 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et une matrice $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leq n$ telle que $G = A^T A$.
2. Justifier l'égalité $\forall M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \text{rg}(M^T M) = \text{rg}(M)$
3. En déduire une relation entre $\text{rg}(G)$ et $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$.

Corrigé : 1. Si les u_i sont tous nuls, le résultat est trivial. Notons $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. L'espace F est euclidien et admet une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ avec $p \leq n$. Par suite

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^p \langle u_i, e_k \rangle e_k, \sum_{\ell=1}^p \langle u_j, e_\ell \rangle e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^p \langle u_i, e_k \rangle \langle u_j, e_k \rangle$$

Ainsi, notant $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = (\langle u_j, e_i \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1; p \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket}$, on conclut

$$\boxed{G = A^T A}$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On a clairement $\text{Ker } M \subset \text{Ker } M^T M$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^T M X = 0$. En multipliant à gauche par X^T , on obtient

$$X^T M^T M X = \langle M X, M X \rangle = 0$$

d'où $M X = 0$ et l'inclusion $\text{Ker } M^T M \subset \text{Ker } M$. Le théorème du rang appliqué M et $M^T M$ donne alors

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } M + \text{rg } (M) \quad \dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } M^T M + \text{rg } (M^T M)$$

On conclut

$$\boxed{\text{rg } (M) = \text{rg } (M^T M)}$$

3. D'après les résultats précédemment établis, on conclut

$$\boxed{\text{rg } (G) = \text{rg } (A^T A) = \text{rg } (A) = \text{rg } (u_1, \dots, u_n)}$$

Exercice 4 (**)

Soit $a > 0$. Montrer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\text{sh}((2n+1)a)}$

Corrigé : On a pour n entier

$$\frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} = \frac{2e^{-(2n+1)a}}{1 + e^{-2(2n+1)a}} = 2e^{-(2n+1)a} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k(2n+1)a}$$

On pose $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{n,k} = 2(-1)^k e^{-(2n+1)a} e^{-2k(2n+1)a}$

Montrons la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$. Comme $e^{-2a(2n+1)} \in]0; 1[$ pour n entier, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = 2e^{-(2n+1)a} \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-2a(2n+1)})^k = \frac{2e^{-(2n+1)a}}{1 - e^{-2a(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-(2n+1)a} > 0$$

La série $\sum 2e^{-(2n+1)a}$ converge ce qui prouve la convergence de $\sum \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| \right)$ d'après le critère des équivalents, licite pour des familles à termes positifs, et prouve ainsi la sommabilité de $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs. Alors, d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-(2n+1)a} (-1)^k e^{-2k(2n+1)a} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^k e^{-(2k+1)(2n+1)a} \right) \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2a(2k+1)})^n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{-(2k+1)a}}{1 - e^{-2a(2k+1)}} \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}((2n+1)a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\text{sh}((2n+1)a)}}$$

Exercice 5 (***)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = MM^\top$ et $M^2 = -I_n$

Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ puis caractériser M .

Corrigé : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les contraintes imposées. On décompose $M = S + A$ avec $S = \frac{M+M^\top}{2}$ et $A = \frac{M-M^\top}{2}$. On a

$$M^\top M = MM^\top \iff (S - A)(S + A) = (S + A)(S - A) \iff SA = AS$$

En transposant, on observe également $(SA)^\top = -AS = -SA$ d'où $SA \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Puis, on a

$$M^2 = -I_n \iff S^2 + A^2 + I_n = -2SA$$

Dans la dernière égalité, le membre de droite est une matrice antisymétrique tandis que le membre de gauche est une matrice symétrique. Par suite

$$SA = 0 \quad \text{et} \quad S^2 + A^2 + I_n = 0$$

En multipliant par S^2 , il vient

$$S^4 + S^2 A^2 + S^2 = S^4 + (SA)^2 + S^2 = S^4 + S^2 = 0$$

d'où, passant à la trace

$$\|S^2\|^2 + \|S\|^2 = 0$$

On en déduit $S = 0$ puis

$$M^\top M = MM^\top = -A^2 = -M^2 = I_n$$

autrement dit, la matrice M est orthogonale. On a $1 = (\det M)^2 = \det(M^2) = \det(-I_n) = (-1)^n$ d'où $n = 2p$ avec p entier non nul. Par réduction d'une matrice orthogonale, la matrice M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de type (1) , (-1) et $R(\theta)$ avec θ réel. Comme $M^2 = -I_n$, on en déduit l'absence de blocs (1) et (-1) et on a donc M orthogonalement semblable à $\text{diag}(R(\theta_1), \dots, R(\theta_p))$ avec les θ_i réels. Enfin, il vient

$$M^2 - I_n \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad 2\theta_i \equiv \pi [2\pi] \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \theta_i \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Enfin, on observe que les matrices de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont orthogonalement semblables (quitte à opposer un vecteur de la base) et on en déduit que M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. La synthèse ne présente pas de difficulté et on conclut

$$\boxed{M = P \text{diag}(R(\pi/2), \dots, R(\pi/2)) P^\top \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

Variante : On peut recourir au théorème spectral pour montrer l'orthogonalité de M . Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les contraintes imposées. On a

$$(M^\top M)^2 = M^\top \underbrace{MM^\top}_{=M^\top M} M = (M^2)^\top M^2 = (-I_n)^2 = I_n$$

Ainsi, la matrice $M^\top M$ admet comme polynôme annulateur $X^2 - 1$. Or, c'est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On observe

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \langle X, M^\top M X \rangle = \|MX\|^2 \geq 0$$

d'où $M^\top M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit que le spectre de $M^\top M$ est inclus dans $\{1\}$ donc égal à $\{1\}$ d'où $M^\top M$ semblable à I_n et donc égale à I_n .

Exercice 6 (**)

Pour $x \geq 0$, on pose

$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Justifier que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer un équivalent de $\Phi(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
2. Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$ et calculer cette intégrale.

Corrigé : 1. On pose $f(t) = e^{-t^2}$ pour $t \geq 0$. On a $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparées. Par comparaison et critère de Riemann, on conclut que

La fonction Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -2te^{-t^2}$ et $t \mapsto -\frac{1}{2t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x; +\infty[$ avec

$$-\frac{e^{-t^2}}{2t} \xrightarrow[t \rightarrow x]{} -\frac{e^{-x^2}}{2x} \quad \text{et} \quad -\frac{e^{-t^2}}{2t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, en intégrant par parties, il vient

$$\Phi(x) = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$$

avec convergence de la nouvelle intégrale. On a $\frac{e^{-t^2}}{t^2} = o(e^{-t^2})$ et donc, par intégration des relations de comparaison, on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\Phi(x))$$

Ainsi

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

Variante : Avec le changement de variables $u = t^2$, il vient pour $x > 0$

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du$$

puis

$$\int_{x^2}^{x^2+x} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{x^2+u}} du \leq \Phi(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{x^2}} du$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{-x^2}(1 - e^{-x})}{2\sqrt{x^2+x}} \leq \Phi(x) \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

et on conclut comme précédemment.

2. La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et il en résulte que la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ avec $\Phi'(x) = -e^{-x^2}$ pour $x \geq 0$. Avec l'équivalent précédemment obtenu, on trouve

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad x\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad x\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$ puis, en intégrant par parties,

$$\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx = \underbrace{[x\Phi(x)]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^{+\infty}$$

On conclut

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 7 (***)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[n]{1+t^n}}$

Justifier que pour n entier non nul, l'intégrale définissant I_n est convergente puis étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Corrigé : On pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0; +\infty[\quad f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt[n]{1+t^n}}$$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par conséquent

Pour n entier non nul, l'intégrale définissant I_n converge.

Soit n entier non nul, on a pour $t \in [0; 1[$

$$f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2) \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+t^n)\right)}$$

et pour $t \geq 1$, en écrivant $\ln(1+t^n) = n \ln(t) + \ln(1+t^{-n})$, il vient

$$f_n(t) = \frac{1}{t(1+t^2) \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+t^{-n})\right)}$$

Ainsi

$$f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0; 1[\\ \frac{1}{t(1+t^2)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Enfin, on a la domination

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0; +\infty[\quad 0 \leq f_n(t) \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

et φ intégrable sur $[0; +\infty[$ puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Par convergence dominée, il vient

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

Après décomposition en éléments simples, on trouve

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{-t^2 + t^2 + 1}{t(1+t^2)} dt = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right] dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) \right]_1^x$$

On conclut

$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

Exercice 8 (***)

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$. On pose

$$X = \{x \in E \mid \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$$

Montrer que X est compact si et seulement si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Corrigé : D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour $x \in E$, on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec les x_i coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. On a

$$\langle f(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Ainsi, l'application $\varphi : x \mapsto \langle f(x), x \rangle$ est polynomiale en les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ ce qui prouve sa continuité et $X = \varphi^{-1}([-\infty; 1])$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle \geq \lambda_1 \|x\|^2$$

Si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors

$$\langle f(x), x \rangle \leq 1 \implies \lambda_1 \|x\|^2 \leq 1 \implies x \in B_f(0, 1/\sqrt{\lambda_1})$$

ce qui prouve

$$X \subset B_f(0, 1/\sqrt{\lambda_1})$$

L'ensemble X est donc un fermé borné de E espace de dimension finie. Par conséquent, l'ensemble X est compact. Si $f \notin \mathcal{S}^{++}(E)$, il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\lambda_{i_0} \leq 0$ et par suite

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha e_{i_0} \in X$$

ce qui prouve que X est non borné et donc non compact. On conclut

$$X \text{ compact} \iff f \in \mathcal{S}^{++}(E)$$

Exercice 9 (****)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 1 mais pas d'ordre 2. On se propose de démontrer que la loi faible des grands nombres a toujours lieu.

Pour k et n entiers non nuls, on pose

$$Y_{k,n} = X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq n\}} \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad T_n = \sum_{k=1}^n Y_{k,n}$$

$$1. \text{ Montrer } \quad \frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$2. \text{ Établir } \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leq n \mathbb{P}(|X_1| > n)$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} + n \mathbb{P}(|X_1| > n)$$

4. Soit X variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. Montrer

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

5. Démontrer la loi faible des grands nombres pour la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Corrigé : L'ensemble $X_1(\Omega)$ n'est pas fini sans quoi la variable X_1 serait d'espérance finie. On note $X_1(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ avec les x_k deux à deux distincts et on remarque pour la suite que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $|X_1 \mathbf{1}_A| \leq |X_1|$ d'espérance finie par comparaison.

1. Soit n entier non nul. Par linéarité de l'espérance et égalité en loi, on a

$$\frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_{k,n} - X_k) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k \mathbf{1}_{\{|X_k| > n\}}) = -\mathbb{E}(X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| > n\}})$$

Par transfert, il vient $\frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) = -\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{1}_{[0; |x_k|[(n) \mathbb{P}(X_1 = x_k)$

On pose $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad u_k(n) = x_k \mathbf{1}_{[0; |x_k|[(n) \mathbb{P}(X_1 = x_k)$

On a $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_{\infty} \leq |x_k| \mathbb{P}(X_1 = x_k)$

ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_k$. Puis, on a $u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour k entier et par double limite, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et on conclut

$$\boxed{\frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

2. Soit n entier. On a $\{S_n \neq T_n\} \subset \bigcup_{k=1}^n \{Y_{k,n} \neq X_k\} = \bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > n\}$

D'après l'inégalité de Boole, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leq n \mathbb{P}(|X_1| > n)}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, n entier non nul et

$$A_{n,\varepsilon} = \left\{ \left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right\}$$

La famille $(\{S_n = T_n\}, \{S_n \neq T_n\})$ constituant un système complet d'événements, on trouve

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon} \cap \{S_n = T_n\}) + \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon} \cap \{S_n \neq T_n\})$$

Observant $A_{n,\varepsilon} \cap \{S_n = T_n\} \subset \left\{ \left| \frac{1}{n} (T_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right\}$

il s'ensuit

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (T_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) + \mathbb{P}(S_n \neq T_n)$$

La variable aléatoire T_n est bornée comme somme finie de telles variables et admet donc un moment d'ordre 2. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (T_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2}$$

et combinée avec l'inégalité établie dans question précédente, on conclut

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} + n\mathbb{P}(|X_1| > n)}$$

4. Soit n entier non nul. Par transfert, il vient

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x_k| \mathbf{1}_{[|x_k|; +\infty[}(n)}{n} |x_k| \mathbb{P}(X = x_k)$$

On pose $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad v_k(n) = \frac{|x_k| \mathbf{1}_{[|x_k|; +\infty[}(n)}{n} |x_k| \mathbb{P}(X = x_k)$

On a $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|v_k\|_\infty \leq |x_k| \mathbb{P}(X = x_k)$

ce qui prouve la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum v_k$. Puis, on a $v_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour k entier et par double limite, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{n} \mathbb{E}(X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

5. Soit n entier non nul. Par indépendance des $Y_{k,n}$ puis relation de König-Huygens, il vient

$$\mathbb{V}(T_n) = \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n Y_{k,n} \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_{k,n}) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_{k,n}^2) = n \mathbb{E}(X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq n\}})$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq n\}})}{n\varepsilon^2} + n\mathbb{P}(|X_1| > n)$$

En observant

$$n \mathbf{1}_{\{|X_1| > n\}} \leq |X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > n\}}$$

il vient

$$n\mathbb{P}(|X_1| > n) \leq \mathbb{E}(|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > n\}})$$

Avec les notations de la première question, on a par double limite

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où

$$\mathbb{E}(|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Il en résulte

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Enfin, on a par inégalité triangulaire

$$\left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(S_n)) \right| \leq \left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| + \left| \frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) \right|$$

d'où, pour $\varepsilon > 0$

$$\left\{ \left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(S_n)) \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ \left| \frac{1}{n} (S_n - \mathbb{E}(T_n)) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cup \left\{ \left| \frac{1}{n} (\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n)) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

On obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}(S_n))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}(T_n))\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(S_n))\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}(S_n))\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$