

Feuille de révisions n°5

Exercice 1 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 2$. Résoudre $AX = \lambda X$ avec $X^\top = (x_0 \dots x_{p-1})$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A .

Exercice 2 (**)

On pose $\forall x > -1 \quad F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
2. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note

$$\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall v \in A \quad u \circ v = v \circ u\}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. Soient A, B incluses dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$A \subset B \implies \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$$

3. On suppose f *cyclique*, c'est-à-dire il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

(a) Établir
$$\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$$

(b) En déduire
$$\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$$

Exercice 4 (**)

Former le développement en série entière de $x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin}(x))$.

Exercice 5 (***)

On pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S .
2. Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Exercice 6 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer le théorème de Cauchy linéaire pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Exercice 7 (**)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer la forme des solutions de l'équation $X' = AX$.
2. Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires et A la matrice compagne associée à l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre p

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \dots + a_0x = 0 \quad (\text{H})$$

Établir que la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes.

Exercice 8 (***)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec } \lambda \text{ réel}$$

On pose $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ .
2. Montrer que les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.

3. Établir l'égalité
$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Exercice 9 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E .

1. Soient x, a et b dans E tels que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$. Montrer

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\|$$

2. Montrer que pour $x \in E$, il existe un unique vecteur $a \in C$ tel que

$$\|x - a\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

On définit l'application $p : x \mapsto a$ *projection sur le convexe* C .

3. Soit $x \in E$ et $a \in C$ tel que $\langle x - a, y - a \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. Montrer que $a = p(x)$.
4. On suppose qu'il existe $y \in C$ tel que

$$\langle x - p(x), y - p(x) \rangle > 0$$

En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [0; 1]$, obtenir une contradiction.

5. Montrer $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2$

En déduire que p est une application continue.