

Feuille de révisions n°3

Exercice 1 (*)

Soient $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i=1}^n P_i \mathbb{K}[X]$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. On appelle *plus petit commun multiple* des P_i le polynôme unitaire ou nul noté $P_1 \vee \dots \vee P_n$ engendrant cet idéal.
2. Justifier que le ppcm des P_i est multiple de chacun des P_i et montrer pour $P \in \mathbb{K}[X]$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P_i | P \implies P_1 \vee \dots \vee P_n | P$$

Corrigé : 1. Une intersection d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est un idéal et il existe un unique polynôme unitaire ou nul qui engendre un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Ainsi

Le ppcm $P_1 \vee \dots \vee P_n$ est bien défini.

2. Puis, on a $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (P_1 \vee \dots \vee P_n) \mathbb{K}[X] = \bigcap_{i=1}^n P_i \mathbb{K}[X] \subset P_k \mathbb{K}[X]$

et pour $P \in \mathbb{K}[X]$ multiple de chacun des P_i , on a $P \mathbb{K}[X] \subset P_i \mathbb{K}[X]$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ d'où $P \mathbb{K}[X] \subset \bigcap_{i=1}^n P_i \mathbb{K}[X] = (P_1 \vee \dots \vee P_n) \mathbb{K}[X]$. Ainsi

Le ppcm est multiple des P_i et diviseur de tout multiple des P_i .

Exercice 2 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale avec $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$ et $A_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Déterminer χ_A en fonction des χ_{A_i} et π_A en fonction des π_{A_i} .

Corrigé : Avec un calcul par blocs, il vient

$$\chi_A = \det \text{diag}(X I_{m_1} - A_1, \dots, X I_{m_r} - A_r) = \prod_{i=1}^r \det \text{diag}(X I_{m_i} - A_i)$$

Puis, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on trouve, à nouveau par un calcul par blocs

$$P(A) = \text{diag}(P(A_1), \dots, P(A_r))$$

Ainsi $P(A) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad P(A_i) = 0$

autrement dit $P \in \pi_A \mathbb{K}[X] \iff P \in \bigcap_{i=1}^r \pi_{A_i} \mathbb{K}[X] = (\pi_{A_1} \vee \dots \vee \pi_{A_r}) \mathbb{K}[X]$

Par conséquent, les polynômes π_A et $\pi_{A_1} \vee \dots \vee \pi_{A_r}$ sont associés et unitaires donc égaux. On conclut

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad \pi_A = \pi_{A_1} \vee \dots \vee \pi_{A_r}$$

Exercice 3 (***)

Soit n entier ≥ 2 . Pour $\sigma \in S_n$, on pose $M_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application définie par

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

avec $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\sigma \in S_n$. Que représente M_σ pour l'endomorphisme f_σ ? Justifier que la matrice M_σ est orthogonale.
2. Soit $(\sigma, \gamma) \in S_n^2$. Déterminer le produit $M_\sigma M_\gamma$.
3. Soit $\gamma = (1 \dots n)$. Déterminer $J = M_\gamma$ puis χ_J et π_J .
4. Soit $c \in S_n$ un cycle de longueur n . Justifier que les matrices M_c et J sont semblables.
5. Soit $\sigma \in S_n$ avec $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer χ_{M_σ} et π_{M_σ} en fonction des ℓ_i avec $o(c_i) = \ell_i$ pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Corrigé : 1. On a

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n \quad M_\sigma = \text{mat}_{\mathcal{C}} f_\sigma}$$

Pour $\sigma \in S_n$, l'application f_σ envoie la base orthonormée $\mathcal{C}$ sur la base orthonormée $(e_{\sigma(k)})_{1 \leq k \leq n}$. Par conséquent

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n \quad M_\sigma \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$$

2. Soit $(\sigma, \gamma) \in S_n^2$. On a

$$M_\sigma M_\gamma = \text{mat}_{\mathcal{C}} f_\sigma \times \text{mat}_{\mathcal{C}} f_\gamma = \text{mat}_{\mathcal{C}} f_\sigma \circ f_\gamma = \text{mat}_{\mathcal{C}} f_{\sigma \circ \gamma}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (\sigma, \gamma) \in S_n^2 \quad M_\sigma M_\gamma = M_{\sigma \circ \gamma}}$$

Remarque : L'application $\Phi : S_n \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \sigma \mapsto M_\sigma$ réalise un *plongement* du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, à savoir une application injective réalisant

$$\forall (\sigma, \gamma) \in S_n^2 \quad \Phi(\sigma \circ \gamma) = \Phi(\sigma) \Phi(\gamma)$$

3. On trouve

$$\boxed{J = M_\gamma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline I_{n-1} & 0 \end{array} \right)}$$

Avec un développement selon la première ligne, on obtient $\chi_J = X^n - 1$. On observe sans difficulté l'équivalence pour $\sigma \in S_n$

$$M_\sigma = I_n \iff \sigma = \text{id}$$

On a par récurrence $J^k = M_\gamma^k = M_{\gamma^k} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline I_{n-k} & 0 \end{array} \right)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On en déduit la liberté de la famille $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$ d'où

$$\deg \pi_J = \dim \mathbb{R}[J] \geq n$$

Comme $\deg \pi_J \leq n$, on en déduit $\deg \pi_J = n$ et comme π_J divise χ_J et que ces polynômes sont tous deux unitaires, on conclut

$$\boxed{J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline I_{n-1} & 0 \end{array} \right) \quad \chi_J = \pi_J = X^n - 1}$$

4. Soit c un n -cycle. On dispose de $\sigma \in S_n$ tel que $c = (\sigma(1) \dots \sigma(n))$. On vérifie sans difficulté que $\gamma = \sigma^{-1}c\sigma$. Ainsi, en observant l'égalité $M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\text{id}} = I_n$, il vient

$$M_\gamma = M_{\sigma^{-1}} M_c M_\sigma = (M_\sigma)^{-1} M_c M_\sigma$$

On conclut

Les matrices M_c et J sont semblables.

5. Soit $\sigma \in S_n$. On note k le nombre de points fixes de σ et $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. On a

$$\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{supp } \sigma \sqcup \bigsqcup_{i=1}^r \text{supp } c_i = \llbracket 1; n \rrbracket$$

Ainsi, notant ℓ_i la longueur du cycle c_i pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on dispose de $\gamma \in S_n$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad c_i = \left(\gamma \left(1 + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_k \right) \dots \gamma \left(\sum_{k=1}^i \ell_k \right) \right)$$

et

$$\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{supp } \sigma = \{\gamma(n - k + 1), \dots, \gamma(n)\}$$

On obtient alors

$$\gamma c \gamma^{-1} = \prod_{i=1}^r \left(1 + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_k \dots \sum_{k=1}^i \ell_k \right)$$

d'où

$$M_{\gamma c \gamma^{-1}} = \text{diag}(J_{\ell_1}, \dots, J_{\ell_r}, I_k)$$

avec J_ℓ la matrice du cycle $(1 \dots \ell)$ pour ℓ entier ≥ 2 . Pour les mêmes raisons que celles évoquées à la question précédente, les matrices M_σ et $M_{\gamma c \gamma^{-1}}$ sont semblables et un calcul par blocs donne

$\chi_{M_\sigma} = (X - 1)^k \prod_{i=1}^r \chi_{J_{\ell_i}} = (X - 1)^k \prod_{i=1}^r (X^{\ell_i} - 1)$

Enfin, toujours avec un calcul par blocs, on trouve

$$\pi_{M_\sigma} = \pi_{J_{\ell_1}} \vee \dots \vee \pi_{J_{\ell_r}} \vee \pi_{I_k} = (X^{\ell_1} - 1) \vee \dots \vee (X^{\ell_r} - 1) \vee \pi_{I_k}$$

Si l'entier k est non nul, on a $\pi_{I_k} = X - 1$ mais comme $X - 1 \mid X^{\ell_i} - 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on conclut

$\pi_{M_\sigma} = (X^{\ell_1} - 1) \vee \dots \vee (X^{\ell_r} - 1)$

Exercice 4 (***)

Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$ est bien définie puis la calculer.

Corrigé : On pose $\forall t \in]0; 1] \quad f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$

On a clairement $0 \leq f(t) < 1$ pour tout $t \in]0; 1]$. En revanche, le caractère continue par morceaux requiert une justification. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \left] \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right] \quad f(t) = \frac{1}{t} - n$$

Soit $[a; b] \subset]0; 1]$. Déterminons l'intervalle $\left] \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n} \right]$ avec n entier non nul contenant a . On a

$$\frac{1}{n+1} < a \leq \frac{1}{n} \iff n = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor$$

Ainsi $\forall t \in [a; b] \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor} \left(\frac{1}{t} - k \right) \mathbb{1}_{\left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]}$

Cette écriture justifie que f est continue par morceaux sur tout segment de $]0; 1]$ donc sur $]0; 1]$. Alors, comme on a $f(t) = O(1)$, on en déduit que f est intégrable sur $]0; 1]$ et par conséquent

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

Puis, pour n entier non nul, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{t} - n \right) \mathbb{1}_{\left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]} dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{t} - k \right) dt \\ \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k+1} \right] = \ln n - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

d'où $\int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 1 = 1 - \gamma + o(1)$

On conclut $\text{L'intégrale } \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt \text{ converge et vaut } 1 - \gamma.$

Exercice 5 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$. Montrer

$$\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}$$

Corrigé : Supposons $\ln \circ f$ convexe. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\ln \circ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln \circ f(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f(y)$$

Ainsi, pour $\alpha > 0$, d'après la propriété fondamentale du logarithme, il vient après multiplication par α

$$\ln \circ f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln \circ f^\alpha(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f^\alpha(y)$$

Enfin, par concavité de $\ln$, on trouve

$$\lambda \ln \circ f^\alpha(x) + (1 - \lambda) \ln \circ f^\alpha(y) \leq \ln(\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y))$$

L'implication directe s'en déduit. Supposons f^α convexe pour tout $\alpha > 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in [0; 1]$. On a

$$\forall \alpha > 0 \quad f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y)$$

Posons $\forall \alpha \geq 0 \quad \varphi(\alpha) = \lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y) - f^\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y)$

On a $\varphi(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$ (le résultat vaut aussi pour $\alpha = 0$ puisque $\varphi(0) = 0$). Par dérivation, il vient

$$\forall \alpha \geq 0 \quad \varphi'(\alpha) = \lambda f^\alpha(x) \ln \circ f(x) + (1-\lambda) f^\alpha(y) \ln \circ f(y) - f^\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \ln \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

et en particulier $\varphi'(0) = \lambda \ln \circ f(x) + (1-\lambda) \ln \circ f(y) - \ln \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y)$

Or, on a
$$\varphi'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha - 0} \geq 0$$

On conclut
$$\boxed{\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}}$$

Exercice 6 (****)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, U ouvert borné non vide de E , $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et f continue sur $\bar{U}$. On définit le *laplacien* de f sur U noté Δf par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \quad \text{ou} \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x)$$

1. Justifier que f admet un maximum en un point $x_0 \in \bar{U}$.
2. On suppose $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in U$. Montrer

$$x_0 \in \partial U \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier l'existence d'un $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$ et considérer $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ avec e_i le i -ème vecteur de la base canonique.

On suppose désormais que f est *harmonique* sur U , i.e. $\Delta f = 0$. On pose

$$\forall \varepsilon > 0 \quad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$$

3. Montrer que g_ε est continue sur $\bar{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que

$$\forall x \in U \quad \Delta g_\varepsilon(x) > 0$$

4. En déduire
$$\forall x \in U \quad f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

Corrigé : 1. Notons $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Comme l'ouvert U est borné, il existe $R \geq 0$ tel que $U \subset B_f(0, R)$ d'où $\bar{U} \subset \bar{B}_f(0, R) = B_f(0, R)$ puisqu'une boule fermée est un fermé. Ainsi, l'ensemble $\bar{U}$ est un fermé borné de E de dimension finie. Par conséquent, la fonction f continue sur le compact $\bar{U}$ est bornée et atteint ses bornes et donc en particulier

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum en } x_0 \in \bar{U}.}$$

2. Supposons $x_0 \in U$. Par hypothèse, on a $\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^n \partial_k^2 f(x_0) > 0$. Si $\partial_k^2 f(x_0) \leq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors $\Delta f(x_0) \leq 0$ ce qui est faux. Ainsi, il existe un entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\partial_i^2 f(x_0) > 0$. Comme $x_0 \in U$ avec U ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset U$. On a pour t réel

$$x_0 + te_i \in B(x_0, r) \iff |t| < r$$

On pose
$$\forall t \in]-r; r[\quad \varphi(t) = f(x_0 + te_i)$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -r ; r [$ et admet un maximum en zéro puisque f admet un maximum en x_0 . Alors, comme zéro est un point intérieur à $] -r ; r [$, on a

$$\varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = \partial_i^2 f(0) > 0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il vient

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi''(0) \frac{t^2}{2} + o(t^2) = \frac{t^2}{2} (\varphi''(0) + o(1))$$

qui est strictement positive au voisinage de zéro ce qui prouve qu'il s'agit d'un minimum strict, ce qui est absurde. Ainsi, la fonction f atteint son maximum sur $\bar{U}$ en un point $x_0 \in \bar{U} \setminus U = \partial U$ d'où

$$\sup_{x \in \bar{U}} f(x) = f(x_0) \leq \sup_{x \in \partial U} f(x) \leq \sup_{x \in \bar{U}} f(x)$$

et ce maximum n'est atteint en aucun point de U d'après ce qui précède d'où

$$x_0 \in \partial U \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad f(x) < \sup_{x \in \partial U} f(y)$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\forall x \in \bar{U} \quad g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2$

Ainsi, la fonction g_ε est somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar{U}$ et on en déduit

$$g_\varepsilon \in \mathcal{C}(\bar{U}, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$$

Par dérivation on trouve

$$\forall x \in U \quad \forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket \quad \partial_i^2 g_\varepsilon(x) = \partial_i^2 f + 2\varepsilon$$

d'où

$$\forall x \in U \quad \Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le résultat de la question 2, on a

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y)$$

puis

$$\forall y \in \partial U \quad g_\varepsilon(y) = f(y) + \varepsilon \|y\|^2 \leq \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

la borne supérieure $\sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$ étant finie puisque $\partial U \subset \bar{U}$ qui est borné. Ainsi, on trouve

$$\sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \leq \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

d'où

$$\forall x \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad f(x) < \sup_{y \in \partial U} f + \varepsilon \sup_{y \in \partial U} \|y\|^2$$

Pour $x \in U$, faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, on conclut

$$\forall x \in U \quad f(x) \leq \sup_{x \in \partial U} f$$

Remarque : Ce résultat est intitulé *principe du maximum*.

Exercice 7 (***)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire indépendante des X_n à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose
$$\forall \omega \in \Omega \quad S_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

1. Justifier que S_N est une variables aléatoire discrète.
2. Montrer l'égalité $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
3. On suppose X_1 et N d'espérance finie. Montrer que S_N est d'espérance finie et préciser $\mathbb{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
4. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S_N .
5. Retrouver le résultat précédent sans passer par les fonctions génératrices.

Corrigé : 1. On a clairement $S_N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \{S_N = k\} = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \left(\{N = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\} \right)$$

et $\sum_{i=1}^n X_i$ est une variable aléatoire comme fonction du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, pour k entier, l'ensemble $\{S_N = k\}$ est une union dénombrable d'événements donc un événement ce qui prouve

L'application S_N est une variable aléatoire réelle discrète.

2. Soit $t \in [0; 1]$. Par transfert puis probabilités totales avec le système complet $(\{N = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ et indépendances des X_k avec N , il vient

$$\begin{aligned} G_{S_N}(t) &= \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(S_N = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} t^j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^N X_k = j, N = n \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^n X_k = j \right) \mathbb{P}(N = n) \right) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs et indépendance des X_k , on obtient

$$G_{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} t^j \mathbb{P}(S_n = j) \right) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{S_n}(t) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N = n)$$

D'où

$$G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$$

3. On a G_N et G_{X_1} dérivable en 1. Comme $G_{X_1}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) = 1$, on a donc $G_N \circ G_{X_1}$ dérivable en 1 ce qui prouve que S_N est d'espérance finie et on trouve

$$\mathbb{E}(S_N) = G'_{S_N}(1) = G'_{X_1}(1) G'_N \circ G_{X_1}(1) = G'_{X_1}(1) G'_N(1)$$

On conclut

La variable S_N est d'espérance finie et $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

Remarque : La dernière égalité est appelée *identité de Wald*.

4. On a

$$\forall t \in [0; 1] \quad G_{S_N}(t) = G_N(G_{X_1}(t)) = G_N(pt + 1 - p) = e^{\lambda(pt+1-p-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{S_N \sim \mathcal{P}(p\lambda)}$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $(\{N = n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, il vient

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_N = k, N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k, N = n\right)$$

Les variables X_i et N sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) \mathbb{P}(N = n)$$

On a $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$ d'où $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) = 0$ pour $n < k$ et par suite

$$\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$\text{D'où} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_N = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

Avec le changement d'indice $\ell = n - k$, on reconnaît une exponentielle

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_N = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$$

Ainsi

$$\boxed{S_N \sim \mathcal{P}(p\lambda)}$$

Exercice 8 (**)

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$ vérifiant $\text{Tr}(u) = \dim E$. Déterminer u .

Corrigé : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ base orthonormée de E . On a

$$\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \langle u(e_i), e_i \rangle \leq \|u(e_i)\| \|e_i\|$$

et par conséquent

$$\text{Tr}(u) = \dim E \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \langle u(e_i), e_i \rangle = \|u(e_i)\| \|e_i\|$$

On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les vecteurs $u(e_i)$ et e_i sont positivement liés et comme l'endomorphisme u est une isométrie, la seule possibilité est d'avoir $u(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ d'où

$$\boxed{u = \text{id}}$$

Variante : On note $n = \dim E$. Soit $\mathcal{B}$ base orthonormée de E . Les colonnes de $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'où $|a_{i,j}| \leq 1$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

Ainsi, il vient

$$\text{Tr}(u) = \text{Tr} \text{mat}_{\mathcal{B}} u = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \leq n$$

d'où

$$\text{Tr}(u) = n \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad a_{i,i} = 1$$

Or, on a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1 + \sum_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{j\}} a_{i,j}^2 = 1$$

d'où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \delta_{i,j}$$

On retrouve le résultat annoncé.

Exercice 9 (**)

Soit E euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f .

1. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$.
2. Montrer que si une des inégalités est une égalité avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre.
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\langle f(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Montrer

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_i) = \lambda_i e_i$$

Corrigé : 1. D'après le théorème spectral, on a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$. Pour $x \in E$, on note $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ sa décomposition dans la somme directe associée. On trouve

$$\forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda \|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \|x_\lambda\|^2$$

la deuxième égalité résultant du théorème de Pythagore. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2}$$

2. Supposons $\langle f(x), x \rangle = \lambda_n \|x\|^2$. Il s'ensuit

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f) \setminus \{\lambda_n\}} \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{< 0} \|x_\lambda\|^2 = 0 \iff x = x_{\lambda_n} \in E_{\lambda_n}(f)$$

La preuve est identique avec λ_1 . On conclut

$$\boxed{\text{Si une des inégalités est une égalité avec } x \neq 0, \text{ alors } x \text{ est vecteur propre.}}$$

3. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1 \geq 1$ et considérons E muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. D'après la question précédente, on a $f(e_n) = \lambda_n e_n$ d'où la stabilité de $\text{Vect}(e_n)$ par f et donc également la stabilité de $\text{Vect}(e_n)^\perp$ puisque l'endomorphisme f est auto-adjoint. On applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit $f_{\text{Vect}(e_n)^\perp}$ et on conclut

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f(e_i) = \lambda_i e_i}$$