

Feuille de révisions n°4

Exercice 1 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn, K un compact convexe non vide et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $u(K) \subset K$. On note $C = (\text{id} - u)(K)$ puis on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \quad \text{et} \quad x_n = (\text{id} - u) \circ u_n(a) \quad \text{avec} \quad a \in K$$

1. Montrer que C est un compact.
2. Montrer que $(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ puis $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K .

Corrigé : 1. On a $\text{id} - u$ continue et $C = (\text{id} - u)(K)$ est l'image directe d'un compact par une application continue donc

L'ensemble C est compact.

2. Par récurrence immédiate, on a $u^k(K) \subset K$ pour tout k entier. Par convexité de K , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(a) \in K$$

Par conséquent, on a $x_n \in (\text{id} - u)(K)$ pour tout n entier. Puis, par télescope,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [u^k(a) - u^{k+1}(a)] = \frac{1}{n} [a - u^n(a)]$$

L'ensemble K est compact donc borné et par conséquent, il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|x_n\| \leq \frac{1}{n} (\|a\| + \|u^n(a)\|) \leq \frac{2M}{n}$$

On conclut

$$(x_n)_n \in C^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

3. L'ensemble C est compact donc fermé. Or, on a construit une suite à valeurs dans C convergente de limite nulle. Par fermeture de C , on en déduit

$$0 \in C = (\text{id} - u)(K)$$

Autrement dit

$$\exists x \in K \quad | \quad u(x) = x$$

Remarque : Il s'agit du *théorème de Markov-Kakutani*.

Exercice 2 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec

$$B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i). \quad \text{Montrer}$$

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit $z_1, \dots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer
$$\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)} \text{ pour } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$$

Corrigé : 1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de scalaires λ_i tels que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}$$

Pour déterminer les λ_i , on effectue l'opération suivante

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left[\frac{A}{B} (X - \alpha_i) \right]_{|_{X=\alpha_i}} = \lambda_i$$

Or, en écrivant $B = (X - \alpha_i)Q_i$ avec $Q_i \in \mathbb{K}[X]$, on constate que $P'(\alpha_i) = Q_i(\alpha_i)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}}$$

Variante : On peut retrouver directement le résultat du théorème. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ associée à $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $A = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i)L_i$ d'où

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)L_i}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Pour $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, on a
$$\frac{X^{k+1}}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{k+1}}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, il vient
$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$$

Pour $k = n-1$, on a $\deg X^{k+1} = n$ donc il faudrait isoler la partie entière du reste. On a

$$\frac{X^n}{P} = 1 + \frac{X^n - P}{P} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, on trouve
$$-1 = -\sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)z_i}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)} = \delta_{k,n-1}}$$

Exercice 3 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. Établir
$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

2. Soit p entier et R le rayon de convergence de $\sum \frac{S_{p,n}}{n!} z^n$. Justifier $R = +\infty$.

3. Déterminer une expression sommatoire de $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Corrigé : 1. Soit p et n entiers. Choisir une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, puis les k éléments de l'image avec $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix. Notant $\mathcal{S}(E, F)$ les surjections de E sur F , on a

$$\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket} = \bigsqcup_{k=0}^n \bigsqcup_{Y \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card } Y=k} \underbrace{\mathcal{S}(\llbracket 1; p \rrbracket, Y)}_{\text{Card}=S_{p,k}}$$

Ainsi

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

2. Soit p entier. On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{S_{p,n}}{n!} \leq \frac{n^p}{n!}$

et la série entière $\sum \frac{n^p}{n!} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{z^n}{n!}$ à savoir $+\infty$. On en déduit $R \geq +\infty$ autrement dit

$$R = +\infty$$

Variante : On peut aussi observer tout simplement $S_{p,n} = 0$ pour tout $n > p$ ce qui garantit que la suite $\left(\frac{S_{p,n}}{n!} r^n \right)_n$ est bornée pour tout $r \geq 0$.

3. On a $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \frac{n^p}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{S_{p,k}}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$

Soit p entier. Les séries entières $\sum \frac{S_{p,n}}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ ont chacune un rayon de convergence $+\infty$ et d'après le théorème du produit de Cauchy pour des séries entières

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{p,n}}{n!} z^n \right) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)}_{=e^z}$$

On en déduit en particulier, toujours d'après le théorème du produit de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_{p,n}}{n!} x^n &= e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} x^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k^p (-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} \right) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{S_{p,n}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{k^p (-1)^{n-k}}{k! (n-k)!}$$

Et on conclut

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad S_{p,n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$$

Exercice 4 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et u, v dans $\mathcal{L}(E)$, diagonalisables et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation pour u et v .

Corrigé : On a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, comme u et v commutent, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v . Notons v_λ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. On a v_λ diagonalisable car induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable. Ainsi, on peut trouver $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $E_\lambda(u)$ qui soit base de diagonalisation de v_λ . Mais cette base est également constituée de vecteurs propres de u (associés à λ). Ainsi, en concaténant $\mathcal{B} = \biguplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$, on obtient une base de diagonalisation simultanée de u et v et on conclut

Il existe une base de diagonalisation pour u et v .

Exercice 5 (**)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ en fonction des paramètres α et β réels.

Corrigé : Si $\alpha < 1$, on a $\frac{\ln(n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

par croissances comparées d'où $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)$

et par comparaison de séries à termes positifs et critère de Riemann, on en déduit la divergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$. On suppose $\alpha > 1$. Soit $\gamma \in]1; \alpha[$. On a, soit directement, soit par croissances comparées (selon le signe de β)

$$\frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln(n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'où $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$

et par comparaison de séries à termes positifs et critère de Riemann, on en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$. On suppose enfin $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, on a

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$$

d'où la divergence de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ par comparaison. Pour $\beta > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^\beta}$ est continue, décroissante, positive sur $[2; +\infty[$ donc, par comparaison série/intégrale, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$. Enfin, avec le changement $u = \ln t$, les intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^\beta}$ et $\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$ sont de même nature. Ainsi, avec le critère de Riemann, on conclut

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 6 (***)

Vérifier l'existence puis calculer

$$\forall n \geq 2 \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

Corrigé : Soit $n \geq 2$. On pose

$$\forall t \geq 0 \quad f_n(t) = \frac{1}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$$

On a $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[0; +\infty[$. Notons

$P = \prod_{k=1}^n (X+k)$ et $P = (X+k)P_k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par décomposition en éléments simples, il existe des réels α_k tels que

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X+k}$$

Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé, multipliant l'égalité précédente par $X+k$ puis substituant $X = -k$, on trouve

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_k = \frac{1}{P_k(-k)}$$

avec
$$P_k(-k) = \prod_{i=1}^{k-1} (-k-i) \prod_{i=k+1}^n (i-k) = (-1)^{k-1} (k-1)! (n-k)!$$

d'où
$$\frac{1}{P} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{X+k}$$

Ainsi, pour $x > 0$, il vient par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^x f_n(t) dt &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} [\ln(x+k) - \ln(k)] \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \left[\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - \ln(k) \right] \end{aligned}$$

Or, un changement d'indice montre que $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} = (1-1)^{n-1}$ et faisant tendre $x \rightarrow +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \ln(k)}$$

Exercice 7 (***)

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
3. Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
4. Montrer que si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle vérifiant $X^T S X > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et on a la caractérisation pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(S) \subset]0; +\infty[$$

1. On a $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soient A, B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $(AB)^T AB = I_n$ et $(A^{-1})^T A^{-1} = AA^T = I_n$. Puis, munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, on a clairement $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset S(0, \sqrt{n})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ avec $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T M$ continue car à coordonnées polynomiales. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On conclut

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

2. D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i > 0$. On note $D = P^T A P$ et on pose $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ puis $S = P \Delta P^T$. On vérifie sans difficulté $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $S^2 = P \Delta^2 P^T = P D P^T = A$. Ainsi

Il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.

3. On a $A^T A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puisque pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$$X^T A^T A X = \|AX\|^2 > 0$$

Ainsi, il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$. On a S inversible puisque pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$SX = 0 \implies X^T S X = 0 \implies X = 0$$

On pose ensuite $O = AS^{-1}$ et on a

$$O^T O = (AS^{-1})^T AS^{-1} = S^{-1} A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$

On conclut

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \exists (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad | \quad A = OS$

4. Soit G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit $A \in G$. On utilise le résultat de la décomposition polaire : il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. Ainsi, on a $S = O^T A \in G$ et par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad S^k \in G$$

La suite $(S^k)_k$ est à valeurs dans G compact donc il existe φ extractrice telle que

$$S^{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} S^* \in G$$

D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T S P$ est diagonale. Soit $\lambda \in \text{Sp}(S)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ normée avec $SX = \lambda X$. Par continuité du produit matriciel et du produit scalaire (bilinéaire en dimension finie), on a

$$\lambda^{\varphi(k)} = \langle S^{\varphi(k)} X, X \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle S^* X, X \rangle = \lambda^*$$

puis

$$S^{\varphi(k)} X = \lambda^{\varphi(k)} X \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} S^* X = \lambda^* X$$

Si $\lambda > 1$, il vient

$$\langle S^k X, X \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'existence d'une sous-suite convergente pour $(\lambda^k)_k$. Si $\lambda < 1$, on trouve

$$\langle S^k X, X \rangle = \lambda^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Après extraction, on aurait donc $\lambda^* = 0$ ce qui est absurde puisqu'on a $\lambda^* \in \text{Sp}(S^*)$ avec $S^* \in G \subset GL_n(\mathbb{R})$ d'où S^* inversible. Par conséquent, on $\text{Sp}(S) = \{1\}$ et comme S est diagonalisable, elle est semblable à I_n et donc $S = I_n$, d'où $A = O$. On conclut

$G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Exercice 8 (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à M .

1. Montrer l'inclusion $\text{Sp}(M) \subset i\mathbb{R}$.
2. Montrer $\text{Ker } f \perp \text{Im } f$. En déduire $g = f_{\text{Im } f} \in \text{GL}(\text{Im } f)$ et $\text{rg } M$ pair.
3. Montrer que g^2 diagonalisable.

Corrigé : 1. Soit $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. Par suite

$$M^T X = \lambda X^T \text{ puis } -X^T M \bar{X} = \lambda X^T \bar{X} \text{ et } M \bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X} \text{ puis } X^T M \bar{X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X}$$

Il s'ensuit que $\lambda = -\bar{\lambda}$ et on conclut $\boxed{\text{Sp}(M) \subset i\mathbb{R}}$

2. Soit $(x, y) \in \text{Ker } f \times E$. On note $X = \text{mat}_{\mathcal{C}} x$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{C}} y$ avec $\mathcal{C}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a $\langle x, f(y) \rangle = X^T M Y = -(MX)^T Y = -\langle f(x), y \rangle = 0$

Par suite, on obtient $\text{Ker } g = \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$ d'où

$$\boxed{g \in \text{GL}(\text{Im } f)}$$

Si $\text{rg}(M)$ est impair, alors χ_g admet une racine réelle ce qui est absurde puisque

$$\text{Sp}(g) \subset \text{Sp}(f) \setminus \{0\} = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \setminus \{0\} = \emptyset$$

On conclut $\boxed{\text{Le rang de } M \text{ est pair.}}$

Remarque : On pourrait aussi utiliser $\det(g) = \det(g^*)$ en observant $g^* = -g$.

3. On a $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$. D'où, pour $(x, y) \in (\text{Im } f)^2$,

$$\langle g^2(x), y \rangle = \langle f^2(x), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^2(y) \rangle = \langle x, g^2(y) \rangle$$

D'après le théorème spectral, on conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g^2 \text{ est diagonalisable.}}$$

Exercice 9 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$ -evn. Montrer que les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Corrigé : Soit A une partie ouverte et fermée et non vide de E . Supposons $A \neq E$. Soit $a \in A$ et $b \notin A$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = a + t(b - a)$

et $I = \{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in A\}$

L'ensemble I est une partie non vide car $0 \in I$ et majorée par 1 donc admet une borne supérieure finie $\alpha \in [0; 1]$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\alpha_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$.

L'application φ est continue car $\|b - a\|$ -lipschitzienne et par continuité, on a

$$\varphi(\alpha_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) \in \bar{A} = A$$

Par ailleurs, l'ensemble A est ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(\varphi(\alpha), r) \subset A$. Il s'ensuit

$$\varphi\left(\alpha + \frac{r}{2\|b - a\|}\right) = \varphi(\alpha) + \frac{r}{2} \frac{b - a}{\|b - a\|} \in B(\varphi(\alpha), r) \subset A \quad \text{et} \quad \alpha + \frac{r}{2\|b - a\|} > \alpha$$

ce qui est absurde par définition de α en tant que borne supérieure de I. L'hypothèse qu'il existe une partie A ouverte et fermée non vide de E et distincte de E est donc fausse. On conclut

Les parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E lui-même.

Variantes : 1. On a $\varphi(1) = b \notin A$ d'où $\alpha < 1$ et par définition de α , on a $\varphi(t) \notin A$ pour tout $t \in]\alpha; 1]$. Comme $E \setminus A$ est fermé, considérant une suite $(\beta_n)_n \in]\alpha; 1]^{\mathbb{N}}$ avec $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$, il vient par continuité

$$\varphi(\beta_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) \in E \setminus A$$

ce qui contredit $\varphi(\alpha) \in A$.

2. On montre que l'indicatrice 1_A est continue. Si $x \in A$, alors il existe U ouvert $\subset A$ tel que $1_A(y) = 1$ pour tout $y \in U$ d'où la continuité. Si $x \notin A$, on fait de même puisque $E \setminus A$ est ouvert. Ainsi, on a $t \mapsto 1_A(xt + (1-t)y)$ continue avec $x \in A$ et $y \notin A$ et on obtient une contradiction.

Exercice 10 (***)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour n entier, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ avec la convention $S_0 = 0$ et $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. On pose

$$T = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On note $q_n = \mathbb{P}(T = n)$ pour n entier non nul et $q_0 = 0$.

1. Soit n entier non nul. Déterminer la loi de S_n . On pourra poser $Y_k = \frac{1 + X_k}{2}$ pour tout k entier nul nul.

2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{2n} = \sum_{k=0}^n q_{2k} p_{2(n-k)}$$

3. Justifier que les séries entières $\sum p_n t^n$ et $\sum q_n t^n$ admettent des rayons de convergence ≥ 1 . On note respectivement f et g leurs sommes sur $] -1; 1[$.

4. Montrer
$$\forall t \in] -1; 1[\quad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$

5. Déterminer le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ sur $] -1; 1[$. Les coefficients du développement devront être exprimés en fonction du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ avec n entier.

6. En déduire une expression de $f(t)$ pour $t \in] -1; 1[$ puis une expression de q_n pour n entier non nul.

Corrigé : 1. On note X_i le déplacement du pion à l'instant i . La suite $(X_i)_{i \geq 1}$ est constituée de variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$ et on a $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout n entier.

Les variables $\frac{1 + X_i}{2}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ d'où $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{1 + X_i}{2} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Ainsi

$$\forall k \in [0; n] \quad \mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(U_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque : En particulier, on observe que $S_n(\Omega) = \{k \in \llbracket -n ; n \rrbracket \mid k + n \in 2\mathbb{N}\}$.

2. On observe

$$\{T = n\} = \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{S_k \neq 0\}$$

En particulier, pour n entier, on a $\{T = 2n + 1\} \subset \{S_{2n+1} = 0\}$ qui est impossible. Puis, pour n entier non nul, il vient en considérant le premier retour à l'origine en $2k$ avec $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} \{S_{2n} = 0\} &= \{S_{2n} = 0\} \cap \bigcup_{k=1}^{2n} \{T = k\} = \{S_{2n} = 0\} \cap \bigcup_{k=1}^n \{T = 2k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \left\{ T = 2k, S_{2k} + \sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0 \right\} = \bigcup_{k=1}^n \{T = 2k\} \cap \left\{ \sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

Les événements $\{T = 2k\}$ et $\left\{ \sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0 \right\}$ sont indépendants et il vient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = 2k) \mathbb{P}\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = 2k) \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0) = \sum_{k=1}^n q_{2k} p_{2(n-k)}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{2n} = \sum_{k=0}^n q_{2k} p_{2(n-k)}$$

3. Immédiat.

4. On considère $u : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^n$ et $v : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n} t^n$ dont le rayon de convergence est ≥ 1 . On a avec la complétion $q_0 = 0$

$$\forall t \in]-1 ; 1[\quad u(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} t^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{2k} p_{2(n-k)} \right) t^n$$

Par produit de Cauchy de séries entières, il vient

$$\forall t \in]-1 ; 1[\quad u(t) = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_{2n} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^n \right) = 1 + u(t)v(t)$$

Il s'ensuit

$$\forall t \in]-1 ; 1[\quad u(t^2) = 1 + u(t^2)v(t^2)$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in]-1 ; 1[\quad f(t) = 1 + f(t)g(t)$$

5. En complétant les produits à la Wallis, il vient

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1 ; 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots (2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} \end{aligned}$$

6. Soit $t \in]-1 ; 1[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p)t^2)^n$$

On a $4p(1-p) \in [0; 1]$ d'où $4t^2p(1-p) \in [0; 1[$ pour $t \in]-1; 1[$ et on conclut

$$\boxed{\forall t \in]-1; 1[\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4t^2p(1-p)}}$$

La fonction f croît sur $[0; 1[$ comme somme (infinie) de fonctions croissantes d'où $f(t) \geq f(0) = 1 > 0$ pour $t \in [0; 1[$ puis

$$\forall t \in]0; 1[\quad g(t) = 1 - \frac{1}{f(t)} = 1 - \sqrt{1 - 4t^2p(1-p)}$$

En procédant comme à la question 5, on trouve

$$\forall t \in [-1; 1[\quad \sqrt{1-t} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)4^n} t^n$$

d'où
$$\forall t \in]0; 1[\quad g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n-1)} p^n (1-p)^n t^{2n}$$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q_{2n} = \frac{\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n}{(2n-1)} = \frac{p_{2n}}{2n-1}}$$