

Feuille de révisions n°6

Exercice 1 (****)

On pose
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_n = \chi_{A_n}$$

1. En considérant $P_n(2 \cos(\theta))$ avec $\theta \in]0; \pi[$, déterminer une expression factorisée de P_n .
2. En déduire que la matrice A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres

Corrigé : 1. Soit $\theta \in]0; \pi[$. En développant sur la première ligne, on trouve pour $n \geq 3$

$$P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) P_{n-1}(2 \cos(\theta)) - P_{n-2}(2 \cos(\theta))$$

Ainsi, la suite $(P_n(2 \cos(\theta)))_{n \geq 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$$

Les racines $e^{\pm i\theta}$ sont complexes conjuguées d'où l'existence de réels λ, μ tels que

$$\forall n \geq 1 \quad P_n(2 \cos(\theta)) = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$$

On a $P_0(2 \cos(\theta)) = 1$ et $P_1(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)$. Puis, on trouve

$$\begin{cases} P_0(2 \cos(\theta)) = \lambda = 1 \\ P_1(2 \cos(\theta)) = \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 2 \cos(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin(\theta) \cos(n\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Soit n entier non nul. On a

$$P_n(2 \cos(\theta)) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \theta \in \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ étant injective sur $]0; \pi[$, on a

$$\text{Card} \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\} = \text{Card} \left\{ \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\}$$

Comme P_n est unitaire de degré n et qu'on vient d'exhiber n racines distinctes, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = \prod_{k=1}^n \left(X - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right)}$$

Remarque : La suite $(P_n(2 \cos(\theta)))_n$ est la suite des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

2. Soit n entier non nul. La matrice A_n admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable par condition suffisante. Notons

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

On a

$$(A_n - 2 \cos(\theta_k) I_n) X = 0 \iff \forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_{\ell-1} - 2 \cos(\theta_k) x_\ell + x_{\ell+1} = 0 \quad \text{avec} \quad x_0 = x_{n+1} = 0$$

La suite $(x_\ell)_{\ell \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et comme à la première question, on obtient l'existence de α, β réels tels que

$$\forall \ell \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket \quad x_\ell = \alpha \cos(\ell \theta_k) + \beta \sin(\ell \theta_k)$$

La condition $x_0 = 0$ fournit $\alpha = 0$ et on obtient

$$\forall \ell \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_\ell = \beta \sin\left(\frac{\ell k \pi}{n+1}\right)$$

On conclut

La matrice A_n est diagonalisable avec $\text{Sp}(A_n) = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\}$
 et $E_{2 \cos(\frac{k\pi}{n+1})}(A_n) = \text{Vect} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Remarque : On peut invoquer le théorème spectral pour la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle A_n .

Exercice 2 (**)

Résoudre sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \tan(t) \tag{L}$$

Corrigé : Notons $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Le couple $(\cos, \sin)$ est un système fondamental de solutions. On procède ensuite par variation des constante. Une solution de (L) est donnée par $x = \lambda \cos + \mu \sin$ avec $\lambda, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, solutions pour tout $t \in I$ de

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda'(t) \cos(t) + \mu'(t) \sin(t) = 0 \\ -\lambda'(t) \sin(t) + \mu'(t) \cos(t) = \tan(t) \end{cases} &\iff R(-t) \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(t) \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos(t)} \\ \mu'(t) = \sin(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite, pour $t \in I$

$$\lambda(t) = \alpha - \int^t \left(\frac{1}{\cos(u)} - \cos(u) \right) du = \alpha + \sin(t) - \int^t \frac{\cos(u)}{1 - \sin(u)^2} du = \alpha + \sin(t) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right|$$

et

$$\mu(t) = \beta - \cos(t)$$

avec α, β réels. Les solutions de (L) sont décrites par

$$\forall t \in I \quad x(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$$

On conclut

$$S_L = \left\{ t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - \frac{1}{2} \cos(t) \ln \left| \frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right| \right\}$$

Exercice 3 (***)

On note E l'espace des fonctions continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie en $+\infty$. Pour $f \in E$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} e^{-n} \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$$

1. Justifier que la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$ est bien définie pour $f \in E$.
2. Calculer $T_n(f_\alpha)$ pour $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $(T_n(f_\alpha))_{n \geq 1}$.
3. Soit $f \in E$. En considérant h définie sur $[0; 1]$ par

$$h(u) = \begin{cases} f(-\ln(u)) & \text{si } u \in]0; 1] \\ \lim_{+\infty} f & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

déterminer le comportement asymptotique de la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$.

4. Soit $f \in E$ puis $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour n entier non nul.

(a) Calculer $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ pour n entier non nul.

(b) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 3.

Corrigé : 1. Soit $f \in E$. Notons $\ell = \lim_{+\infty} f$. On dispose d'un seuil $A \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq 2\ell$ pour $t \geq A$ et la fonction continue f est bornée sur le segment $[0; A]$. Il s'ensuit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puis

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \frac{n^k}{k!} e^{-n} \leq \|f\|_\infty \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

d'où la convergence absolue d'après la convergence de la série exponentielle. Ainsi

$$\text{La suite } (T_n(f))_n \text{ est bien définie pour tout } f \in E.$$

2. Soit $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$. On a $T_n(f_\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha \frac{k}{n}} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$ d'où

$$T_n(f_\alpha) = \exp\left[n\left(e^{-\frac{\alpha}{n}} - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right]$$

Ainsi

$$\forall (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad T_n(f_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha} = f_\alpha(1)$$

3. Par construction, on a $h \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, on dispose de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|h - P\|_{\infty, [0; 1]} \leq \varepsilon$$

Par commodité, on confond polynôme et fonction polynomiale. Notant $\varphi : t \mapsto e^{-t}$, il vient

$$\|h \circ \varphi - P \circ \varphi\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \|h - P\|_{\infty, [0; 1]} \leq \varepsilon$$

On écrit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, on pose $p = P \circ \varphi$ et remarquant $h \circ \varphi = f$, on obtient par inégalité triangulaire

$$|T_n(f) - f(1)| \leq \underbrace{|T_n(f) - T_n(p)|}_{\leq \|f-p\|_{\infty, \mathbb{R}_+}} + |T_n(p) - p(1)| + \underbrace{|p(1) - f(1)|}_{\leq \|f-p\|_{\infty, \mathbb{R}_+}}$$

Puis
$$|T_n(p) - p(1)| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| |T_n(f_k) - f_k(1)|$$

D'après le résultat de la question 2, on peut choisir n_0 entier tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \sum_{k=0}^N |a_k| |T_n(f_k) - f_k(1)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \geq n_0 \quad |T_n(f) - f(1)| \leq 3\varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(1)}$$

4.(a) Soit n entier non nul. Par indépendance, il vient

$$\forall t \in [0; 1] \quad G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (e^{t-1})^n = e^{n(t-1)}$$

La fonction génératrice caractérisant la loi, il s'ensuit que $S_n \sim \mathcal{P}(n)$. La fonction f étant bornée, la variable $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ est d'espérance finie et par transfert

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(S_n = k) = T_n(f)}$$

4.(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_n = \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\}$. Il vient

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbf{1}_{A_n}\right) \leq 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}(A_n) = o(1)$$

d'après la loi faible des grands nombres puisque $\mathbb{E}(X_1) = 1$. Pour $\delta > 0$, par continuité de f en 1, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0 \quad |x - 1| < \varepsilon \implies |f(x) - f(1)| \leq \delta$$

D'où
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbf{1}_{\Omega \setminus A_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(1)\right| \mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| < \varepsilon}\right) \\ &\leq \delta \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n) \leq \delta \end{aligned}$$

Ainsi
$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(1)\right|\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par inégalité triangulaire, on conclut

$$\boxed{T_n(f) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(1)}$$

Exercice 4 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soient $M_1, \dots, M_n$ des points du plan $\mathbb{R}^2$ et A, B dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, \dots, M_n\}$. On note $\vec{a}_i$ un vecteur normalisé directeur de (AM_i) et de même $\vec{b}_i$ un vecteur normalisé directeur de (BM_i) .

On choisit $\vec{u}$ normalisé hors de $\{\pm \vec{a}_1, \dots, \pm \vec{a}_n\}$ puis $\vec{v}$ normalisé hors de $\{\pm u, \pm \vec{b}_1, \dots, \pm \vec{b}_n\}$ (choix possibles car les ensembles à exclure sont finis). Ainsi, les droites $A + \mathbb{R}\vec{u}$ et $B + \mathbb{R}\vec{v}$ sont sécantes en un point C et ne rencontrent aucun des M_i . Par conséquent, on peut définir le chemin

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi(t) = \begin{cases} A + 2tAC\vec{u} & \text{si } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ C + (2t - 1)CB\vec{v} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

Le chemin est continu, relie A à B et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{M_1, \dots, M_n\}$. Considérant les affixes de ces points, on conclut

L'ensemble $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie. Montrer

f diagonalisable $\iff$ tout sev stable par f admet un supplémentaire stable

Corrigé : Supposons f diagonalisable et F stable par f . On note $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}$ une base de diagonalisation de f . La famille concaténée $\mathcal{G} = \mathcal{B}_F \uplus \mathcal{B}$ est une famille génératrice contenant $\mathcal{B}_F$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{B}_F$ par une famille libre $\mathcal{L}$ extraite de $\mathcal{G}$ pour avoir $\mathcal{B}_F \uplus \mathcal{L}$ une base de E . Par conséquent, on aura

$$E = F \oplus \text{Vect}(\mathcal{L})$$

et comme $\mathcal{L}$ est constitué de vecteurs propres de f , on aura également $\text{Vect}(\mathcal{L})$ stable par f .

Réciproquement, le sous-espace $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ est stable par f donc admet un supplémentaire

H stable par f . Supposons $H \neq \{0_E\}$. Alors, l'induit f_H aurait un vecteur propre qui serait également vecteur propre de f et appartiendrait donc à F ce qui est contradictoire puisque $F \cap H = \{0_E\}$. Par suite, on a

$$E = F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$$

On conclut

f diagonalisable $\iff$ tout sev stable par f admet un supplémentaire stable

Remarque : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout sev stable par u admet un supplémentaire stable est dit *semi-simple*. On a donc caractérisé les endomorphismes semi-simples sur un $\mathbb{C}$ -ev.

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et f et g de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

1. Justifier que $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les limites de $f \star g$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigé : 1. On a $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x-t)g(t)| \leq \frac{1}{2} (f(x-t)^2 + g(t)^2)$

La fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de changement de variables avec $u = x-t$, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)^2 dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)^2 du$$

sont de même nature donc convergentes et égales. Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{La convolution } f \star g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad h_n(x) = \int_{-n}^n f(x-t)g(t) dt$

Par relation de Chasles, on a pour n entier et x réel

$$(f \star g - h_n)(x) = \int_{-\infty}^{-n} f(x-t)g(t) dt + \int_n^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

Puis, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{+\infty} f(x-t)g(t) dt \right| &\leq \int_n^{+\infty} |f(x-t)g(t)| dt \\ &\leq \sqrt{\int_n^{+\infty} f(x-t)^2 dt} \sqrt{\int_n^{+\infty} g(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt} \sqrt{\int_n^{+\infty} g(t)^2 dt} \end{aligned}$$

et de même pour l'autre intégrale. On en déduit

$$\|f \star g - h_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On vérifie sans difficulté par continuité sous l'intégrale que la suite $(h_n)_n$ est une suite de fonctions continues (domination sur le segment $[-n; n]$ pour n entier). Comme la limite uniforme préserve la continuité, on conclut

$$\boxed{f \star g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

3. Puis, avec le changement de variables $u = x-t$, on trouve

$$\int_{-n}^n f(x-t)g(t) dt = \int_{x-n}^{x+n} f(u)g(x-u) du$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-n}^{x+n} f(u)g(x-u) du \right| &\leq \int_{x-n}^{x+n} |f(u)g(x-u)| du \\ &\leq \sqrt{\int_{x-n}^{x+n} f(u)^2 du} \sqrt{\int_{x-n}^{x+n} g(x-u)^2 du} \\ \left| \int_{x-n}^{x+n} f(u)g(x-u) du \right| &\leq \sqrt{\int_{x-n}^{x+n} f(u)^2 du} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)^2 du} \end{aligned}$$

et

$$\int_{x-n}^{x+n} f(u)^2 du = \int_{-\infty}^{x+n} f(u)^2 du - \int_{-\infty}^{x-n} f(u)^2 du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On trouve de même pour $x \rightarrow -\infty$. Par double limite, on conclut

$$\boxed{(f \star g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0}$$

Exercice 7 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E . Établir

$$\text{Vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker Tr}$$

Corrigé : Soit $A \in \mathcal{N}$. La matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure stricte d'où $\text{Tr } A = 0$. Par combinaison linéaire, on en déduit l'inclusion $\text{Vect}(\mathcal{N}) \subset \text{Ker Tr}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. On a

$$E_{i,j}^2 = \delta_{j,i} E_{i,j} = 0$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie $M^2 = 0$ puis on pose

$$\forall r \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket \quad N_r = \text{diag}(0 \times I_r, N, 0 \times I_{n-r-2})$$

et un calcul par blocs montre que $N_r^2 = 0$ pour tout $r \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$. Enfin, la famille $\mathcal{L} = (N_{n-2}, \dots, N_0, (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n})$ est échelonnée par rapport à la famille $(E_{n,n}, \dots, E_{1,1}, (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n})$ libre comme sous-famille de la base des matrices élémentaires. Par conséquent, la famille $\mathcal{L}$ est une famille libre et génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{N})$ et le noyau de la trace, forme linéaire non nulle, étant un hyperplan de E , on conclut

$$\boxed{\text{Vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker Tr}}$$

Variante : Pour établir $\text{Tr } A = 0$, on peut utiliser un résultat moins fort que sa trigonalisation. On dispose de p entier non nul tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. On en déduit $\pi_A = X^p$. En considérant A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ d'où $\chi_A = X^n$ (recours au théorème de d'Alembert-Gauss : le polynôme χ_A est scindé, unitaire, de degré n avec 0 pour seule racine). Considérant le terme de degré $n-1$ de χ_A , on conclut $\text{Tr } A = 0$.

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ une application T -périodique avec $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et Y une solution non nulle de (H) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t+T) = \mu Y(t)$$

Corrigé : Pour $X \in S_H$, on a $X_T : t \mapsto X(t+T) \in S_H$. On pose

$$\Phi : \begin{cases} S_H \longrightarrow S_H \\ X \longmapsto X_T \end{cases}$$

L'application Φ est bien définie, linéaire et clairement bijective puisque

$$Y = \Phi(X) = X_T \iff X = Y_{-T}$$

Ainsi, l'application Φ est un automorphisme de S_H , sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ de dimension égale à n . L'automorphisme Φ admet donc une valeur propre complexe non nulle μ et un vecteur propre Y associé, autrement dit

$$\boxed{\exists (\mu, Y) \in \mathbb{C}^* \times S_H \setminus \{0\} \quad | \quad Y_T = \mu Y}$$

Exercice 9 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall A \in E \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

1. Montrer
$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$$

et
$$\rho(A) > 1 \implies \|A^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

On pourra considérer la norme $\|\cdot\|_1$ pour certaines étapes de calcul.

2. Établir
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Corrigé : 1. On considère $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et sur l'espace E . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et X normé (on normalise un vecteur propre) tel que $AX = \lambda X$. Ainsi, on a $A^k X = \lambda^k X$ pour tout k entier d'où, par propriétés de la norme choisie

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |\lambda|^k = \|A^k X\| \leq \|A^k\| \|X\| = \|A^k\|$$

Si $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, alors $|\lambda| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ d'où $|\lambda| < 1$. Si $|\lambda| > 1$, alors $\|A^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$ (ceci vaut pour toute norme par équivalence). Ceci prouve le sens direct de l'équivalence et la seconde implication. Réciproquement, on suppose $\rho(A) < 1$. On dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda} + T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$$

avec les T_λ triangulaires supérieures strictes. On pose

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(\lambda I_{m_\lambda})_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \quad \text{et} \quad N = P \text{diag}(T_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(A)} P^{-1}$$

Ainsi, on a $A = B + N$ avec B diagonalisable, N nilpotente car semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et un produit par blocs montre $BN = NB$. On note ℓ l'ordre de nilpotence de N . Pour p entier, on obtient avec la formule du binôme

$$A^p = (B + N)^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k$$

On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i \in D(0, 1)$ puisque ce sont les valeurs propres de A . Pour $\lambda \in D(0, 1)$, on a par croissances comparées

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$$

On en déduit
$$\binom{p}{k} D^{p-k} = \text{diag} \left(\binom{p}{k} \lambda_1^{p-k}, \dots, \binom{p}{k} \lambda_n^{p-k} \right) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$

et pour $k \in \llbracket 0; \ell - 1 \rrbracket$, l'application $M \mapsto PMP^{-1}N^k$ étant linéaire en dimension finie donc continue, il vient

$$\binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$

d'où
$$A^p = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{p}{k} B^{p-k} N^k \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0_E$$

Ainsi
$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1 \quad \text{et} \quad \rho(A) > 1 \implies \|A^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

2. Si $\rho(A) = 0$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = 0$ d'où A nilpotente et le résultat est immédiat. On suppose $\rho(A) > 0$. Soit $\varepsilon \in]0; \rho(A)[$. On pose

$$A_+ = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A \quad A_- = \frac{1}{\rho(A) - \varepsilon} A$$

On a
$$\rho(A_+) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1 \quad \text{et} \quad \rho(A_-) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) - \varepsilon} > 1$$

D'après le résultat de la première question, on en déduit

$$A_+^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|A_-^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

On en déduit qu'il existe un seuil N entier tel que pour $k \geq N$

$$\|A_+^k\| < 1 \quad \text{et} \quad \|A_-^k\| > 1$$

d'où
$$\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \geq \rho(A) - \varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)}$$

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que la fonction f est *homogène de degré p entier* si

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \quad f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

Montrer que la fonction f est homogène de degré p si et seulement si

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Corrigé : On suppose f homogène. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = f(tx, ty) - t^p f(x, y)$$

Par dérivation composée, on a

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - pt^{p-1} f(x, y)$$

La fonction g étant nulle sur $]0; +\infty[$, on a en particulier $g(1) = 0$ d'où

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$$

Supposons que f vérifie cette dernière relation. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On trouve

$$\forall t > 0 \quad tg'(t) = tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - pt^p f(x, y) = pf(tx, ty) - pt^p f(x, y) = pg(t)$$

Ainsi, la fonction g est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} tg' - pg = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

dont la fonction nulle est l'unique solution d'après le théorème de Cauchy linéaire. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est homogène de degré } p \text{ si et seulement si } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf.}$$