

Feuille de révisions n°6

Exercice 1 (****)

On pose
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad P_n = \chi_{A_n}$$

1. En considérant $P_n(2 \cos(\theta))$ avec $\theta \in]0; \pi[$, déterminer une expression factorisée de P_n .
2. En déduire que la matrice A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres

Exercice 2 (**)

Résoudre sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ l'équation différentielle linéaire

$$y'' + y = \tan(t) \quad (\text{L})$$

Exercice 3 (***)

On note E l'espace des fonctions continue sur $\mathbb{R}_+$ ayant une limite finie en $+\infty$. Pour $f \in E$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} e^{-n} \quad \text{et} \quad \forall (\alpha, t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad f_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$$

1. Justifier que la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$ est bien définie pour $f \in E$.
2. Calculer $T_n(f_\alpha)$ pour $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $(T_n(f_\alpha))_{n \geq 1}$.
3. Soit $f \in E$. En considérant h définie sur $[0; 1]$ par

$$h(u) = \begin{cases} f(-\ln(u)) & \text{si } u \in]0; 1] \\ \lim_{+\infty} f & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

déterminer le comportement asymptotique de la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$.

4. Soit $f \in E$ puis $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{P}(1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour n entier non nul.

(a) Calculer $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ pour n entier non nul.

(b) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de la question 3.

Exercice 4 (***)

Soit F une partie finie de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe par arcs.

Exercice 5 (***)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie. Montrer

f diagonalisable $\iff$ tout sev stable par f admet un supplémentaire stable

Exercice 6 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et f et g de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

1. Justifier que $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les limites de $f \star g$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 7 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E . Établir

$$\text{Vect}(\mathcal{N}) = \text{Ker Tr}$$

Exercice 8 (***)

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ une application T -périodique avec $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ et Y une solution non nulle de (H) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t+T) = \mu Y(t)$$

Exercice 9 (***)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On définit le *rayon spectral* d'une matrice noté ρ par

$$\forall A \in E \quad \rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

1. Montrer $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$

et
$$\rho(A) > 1 \implies \|A^k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

On pourra considérer la norme $\|\cdot\|_1$ pour certaines étapes de calcul.

2. Établir
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que la fonction f est *homogène de degré p entier* si

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \quad f(tx, ty) = t^p f(x, y)$$

Montrer que la fonction f est homogène de degré p si et seulement si

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = pf$$