

Feuille de révisions n°5

Exercice 1 (**)

Soit A matrice compagne de $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suite récurrente linéaire d'ordre $p \geq 2$. Résoudre $AX = \lambda X$ avec $X^\top = (x_0 \dots x_{p-1})$ non nulle. En déduire la forme des sous-espaces propres de A et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de A .

Corrigé : On a $u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n$

avec a_i des scalaires et $a_0 \neq 0$. On rappelle

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}}_{=A} \times X_n = AX_n$$

On note $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. On a

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 = \lambda x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1} = \lambda x_{p-2} \\ a_0 x_0 + \dots + a_{p-1} x_{p-1} = \lambda x_{p-1} \end{cases} \iff \begin{cases} (x_0, \dots, x_{p-1}) = x_0(1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1}) \\ x_0 P(\lambda) = 0 \end{cases}$$

On remarque en particulier que $X \neq 0 \iff x_0 \neq 0$. La dernière équation indique donc λ racine de P . Par ailleurs, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Si la matrice A est diagonalisable, alors on a $\dim \mathbb{K}^p = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = \text{Card Sp}(A)$ ce qui prouve que A admet p valeurs propres distinctes et la réciproque étant immédiate, on conclut

$\begin{aligned} \forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad E_\lambda(A) &= \text{Vect}(1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1}) \\ A \text{ diagonalisable} &\iff A \text{ admet } p \text{ valeurs propres distinctes.} \end{aligned}$

Exercice 2 (**)

On pose $\forall x > -1 \quad F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; +\infty[$.
2. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x > -1$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$

avec $X =] -1; +\infty[$ et $I =] 0; 1[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Soit $x \in X$. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ puis

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{cases} o(1) & \text{si } x \geq 0 \\ O\left(\frac{1}{t-x}\right) & \text{si } x \in]-1; 0[\end{cases} \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{x(t-1)}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\rightarrow} x$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable en 0 par comparaison et éventuellement critère de Riemann et en 1 car prolongeable par continuité.

- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorème généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^x$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement pour empêcher x d'être arbitrairement proche de -1 . Soit $a > -1$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t^{-a}}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I par critère de Riemann puisque $-a < 1$. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > -1$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]-1; +\infty[, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > -1 \quad F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

Ainsi $\forall x > -1 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{du}{u+1}$

On conclut $\boxed{\forall x > -1 \quad F(x) = \ln(1+x)}$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie égale à n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $A \subset \mathcal{L}(E)$, on note

$$\mathcal{C}(A) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \forall v \in A \quad u \circ v = v \circ u\}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier le *bicommutant* $\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\{f\}))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.
2. Soient A, B incluses dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer

$$A \subset B \implies \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$$

3. On suppose f *cyclique*, c'est-à-dire il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

(a) Établir $\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$

(b) En déduire $\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$

Corrigé : 1. On a clairement $\text{id} \in \mathcal{B}(f)$. Soient $(\lambda, u, v) \in \mathbb{K} \times \mathcal{B}(f)^2$ et soit $w \in \mathcal{C}(\{f\})$. On a

$$u \circ w = w \circ u \quad \text{et} \quad v \circ w = w \circ v$$

d'où
$$(\lambda u + v) \circ w = w \circ (\lambda u + v)$$

et
$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) = u \circ (w \circ v) = (u \circ w) \circ v = (w \circ u) \circ v = w \circ (u \circ v)$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}(f)$ est sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Pour $u \in \mathcal{B}(f)$, on a $u \circ f = f \circ u$ puisque $f \in \mathcal{C}(\{f\})$ d'où $f \in \mathcal{B}(f)$. Du fait de la structure d'algèbre de $\mathcal{B}(f)$, on vérifie par récurrence $f^k \in \mathcal{B}(f)$ pour k entier puis $P(f) \in \mathcal{B}(f)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. On conclut

Le bicommutant $\mathcal{B}(f)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre contenant $\mathbb{K}[f]$.

2. Étant donnés A, B inclus dans $\mathcal{L}(E)$, on vérifie sans difficulté

$$A \subset B \implies \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$$

3.(a) Soit $u \in \mathcal{C}(\{f\})$. On note $u(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$ avec les a_k coordonnées de $u(x_0)$ dans la base $\mathcal{B} = (x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$. Pour $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $f^i \in \mathcal{B}(f)$ d'où

$$u(f^i(x_0)) = (u \circ f^i)(x_0) = (f^i \circ u)(x_0) = f^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^i(x_0))$$

ce qui prouve que u et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ coïncident sur $\mathcal{B}$ et sont donc égaux. Ceci prouve $\mathcal{C}(\{f\}) \subset \mathbb{K}[f]$ et l'autre inclusion est immédiate d'où

$\mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$

3.(b) Comme on $\{f\} \subset \mathbb{K}[f]$, il en résulte

$$\mathcal{B}(f) = \mathcal{C}(\mathbb{K}[f]) \subset \mathcal{C}(\{f\}) = \mathbb{K}[f]$$

L'autre inclusion ayant été établie à la question précédente, on conclut

$\mathcal{B}(f) = \mathbb{K}[f]$

Exercice 4 (**)

Former le développement en série entière de $x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin}(x))$.

Corrigé : On pose $\forall x \in]-1; 1[\quad f(x) = \text{sh}(\text{Arcsin}(x))$

On a $f \in \mathcal{C}^2(]-1; 1[, \mathbb{R})$ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f'(x) = \frac{\text{ch}(\text{Arcsin}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

et
$$f''(x) = \frac{\text{sh}(\text{Arcsin}(x))}{1-x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} \text{ch}(\text{Arcsin}(x))$$

Ainsi, la fonction f est solution sur $]-1; 1[$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-t^2)x'' - tx' - x = 0 & \text{(H)} \\ (x(0), x'(0)) = (0, 1) & \text{(CI)} \end{cases}$$

Cherchons une solution développable en série entière à ce problème de Cauchy. On pose $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \in]-\text{R}; \text{R}[$. Par dérivation de séries entières, on trouve

$$(1-t^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - t \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

après distribution des produits, changement d'indice et complétion des sommes pour démarrer à $n = 0$. Par linéarité du symbole somme car convergence, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n] t^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n = 0$$

Les conditions initiales donnent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Par récurrence immédiate, on en déduit $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} \neq 0$ pour tout n entier. Avec un produit télescopique, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = a_1 \prod_{k=1}^n \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)2k} \right) = \frac{\prod_{k=1}^n ((2k-1)^2+1)}{(2n+1)!}$$

Pour $r > 0$, on pose $u_n = a_{2n+1}r^{2n+1}$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)2n} r^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r^2$$

D'après le critère de d'Alembert, si $r^2 > 1$ ce qui équivaut à $r > 1$, la série diverge grossièrement d'où $R \leq 1$. Si $r^2 < 1$ ce qui équivaut à $r < 1$, la série converge absolument d'où $R \geq 1$. Ainsi, la solution développable en série entière est bien définie sur $] -1 ; 1 [$. D'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on conclut

$\forall x \in] -1 ; 1 [\quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = \frac{\prod_{k=1}^n ((2k-1)^2+1)}{(2n+1)!}$

Exercice 5 (***)

On pose
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S .
2. Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$

Les fonctions u_n sont définies au plus sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour $|x| > 1$, on a

$$\frac{x^n}{1-x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{-x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

et pour $|x| < 1$
$$\left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n$$

d'où la convergence absolue de la série. On en déduit

La fonction S est bien définie sur $] -1 ; 1 [$.

Soit $a \in [0; 1[$. On a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [-a; a] \quad \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|} \leq \frac{a^n}{1-a}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} u_n$ et par conséquent

$$\boxed{S \in \mathcal{C}^0(]-1; 1[, \mathbb{R})}$$

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]-1; 1[\quad u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

Soit $a \in [0; 1[$. Il vient

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [-a; a] \quad |u'_n(x)| \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ converge simplement, la série $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $] -1; 1[$ et on conclut

$$\boxed{S \in \mathcal{C}^1(]-1; 1[, \mathbb{R})}$$

2. Soit $x \in]0; 1[$. La fonction $t \mapsto \frac{x^t}{1-x^t}$ est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$, décroissante, positive. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1-x^n}$ donc convergente. Par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt \leq S(x) = \frac{x}{1-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{x}{1-x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt$$

avec
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt = \left[\frac{\ln(1-x^t)}{\ln(x)} \right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

d'où
$$\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \leq S(x) \leq \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Enfin, on constate
$$\frac{x}{x-1} \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}\right)$$

D'où
$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$$

Variantes : (a) Si on reconnaît pas de dérivée dans l'expression $\frac{x^t}{1-x^t}$ avec $t \geq 1$, on peut utiliser le changement de variables $u = x^t$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt$ et $\frac{1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{du}{1-u}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt = \frac{1}{\ln(x)} \int_0^x \frac{du}{1-u} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

(b) Pour la convergence et la valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt$ avec $x \in]0; 1[$, on peut remarquer

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt = \int_1^{+\infty} x^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^{nt} dt$$

Or, la série $\sum \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t} dt = \sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)}$ converge et par intégration terme à terme, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)} = -\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Exercice 6 (**)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer le théorème de Cauchy linéaire pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Corrigé : La fonction $t \mapsto e^{tA}X_0$ est solution du problème de Cauchy. Soit X une solution de ce problème. On a

$$\frac{d}{dt} [e^{-tA}X(t)] = e^{-tA} [-AX(t) + AX(t)] = 0$$

ce qui prouve que la fonction $t \mapsto e^{-tA}X(t)$ est constante puisque ses fonctions coordonnées sont de dérivées nulles sur $\mathbb{R}$. On en déduit $e^{-tA}X(t) = X(0) = X_0$ pour tout t réel autrement dit $X(t) = e^{tA}X_0$ et on conclut

Le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution.
--

Exercice 7 (**)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable. Déterminer la forme des solutions de l'équation $X' = AX$.
2. Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des scalaires et A la matrice compagne associée à l'équation différentielle scalaire linéaire d'ordre p

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \dots + a_0x = 0 \tag{H}$$

Établir que la matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes.

Corrigé : 1. Soit $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Notant $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a

$$X' = AX \iff Y' = DY \iff Y \in \text{Vect} \left(t \mapsto e^{\lambda_i t} E_i \right)_{1 \leq i \leq p} \iff X \in \text{Vect} \left(t \mapsto e^{\lambda_i t} P E_i \right)_{1 \leq i \leq p}$$

L'ensemble des solutions est $\text{Vect} \left(t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i \right)_{1 \leq i \leq p}$ avec les λ_i valeurs propres de A et les V_i vecteurs propres associés.

2. La matrice compagne associée à l'équation (H) est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

On a $(H) \iff X' = AX \quad \text{avec} \quad X^\top = (x \quad x' \quad \dots \quad x^{(p-1)})$

Supposons A diagonalisable. En appliquant le résultat précédent et en spécialisant pour la première coordonnée, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

avec les α_i des scalaires et les λ_i valeurs propres de A . Ainsi, la famille $(t \mapsto e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq p}$ est génératrice de S_H . Comme l'espace S_H est un sev de $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ de dimension égale à p , on a nécessairement les λ_i deux à deux distincts. La réciproque est la condition suffisante de diagonalisation. On conclut

La matrice compagne A est diagonalisable si et seulement si elle admet p valeurs propres distinctes.

Remarque : Ce résultat peut être établi par des arguments ne relevant que de l'algèbre linéaire.

Exercice 8 (***)

Soit $s > 1$ et $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$ espace probabilisé tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ réel}$$

On pose $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \text{ divise } n\}$

et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Déterminer la valeur de λ .
2. Montrer que les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.

3. Établir l'égalité
$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Corrigé : 1. Par σ -additivité, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = 1 = \lambda \zeta(s) \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Avec $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)} > 0$, on a bien $\mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$ pour n entier et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$ ce qui prouve que $\mathbb{P}$ définit bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$. Ainsi

$$\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$$

2. Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts. En particulier, les p_i sont premiers entre eux et il vient

$$\bigcap_{i=1}^n A_{p_i} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad p_i \text{ divise } n\} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \prod_{i=1}^n p_i \text{ divise } n \right\} = A_{p_1 \dots p_n}$$

Puis, pour p entier non nul, on a

$$\mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}(\{pk, k \in \mathbb{N}^*\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(pk)^s} = \frac{\lambda \zeta(s)}{p^s} = \frac{1}{p^s}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_{p_i}\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n p_i\right)^s} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{p_i})$$

Ce qui prouve

Les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.

3. Le seul entier qui n'est divisible par aucun nombre premier est 1, autrement dit

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

Notons $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. On sait que l'ensemble $\mathcal{P}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$ donc dénombrable ce qui justifie la numérotation des nombres premiers. On a par continuité décroissante puis indépendance des A_p

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{1\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{A_{p_n}}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\overline{A_{p_n}}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N (1 - \mathbb{P}(A_{p_n})) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Passant à l'inverse, on conclut

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Exercice 9 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E .

1. Soient x, a et b dans E tels que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$. Montrer

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\|$$

2. Montrer que pour $x \in E$, il existe un unique vecteur $a \in C$ tel que

$$\|x - a\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

On définit l'application $p : x \mapsto a$ *projection sur le convexe* C .

3. Soit $x \in E$ et $a \in C$ tel que $\langle x - a, y - a \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. Montrer que $a = p(x)$.

4. On suppose qu'il existe $y \in C$ tel que

$$\langle x - p(x), y - p(x) \rangle > 0$$

En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [0; 1]$, obtenir une contradiction.

5. Montrer $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2$

En déduire que p est une application continue.

Corrigé : 1. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|x - a + x - b\| \leq \frac{1}{2}(\|x - a\| + \|x - b\|) = \|x - a\|$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $(x - a, x - b)$ est positivement liée, c'est-à-dire $x - b = \lambda(x - a)$ avec $\lambda \geq 0$ ($x - a$ non nul sinon $x = a$ et $\|a - b\| = 0$ absurde). L'égalité en norme impose $\lambda = 1$ d'où $a = b$ ce qui est faux. Ainsi

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\|$$

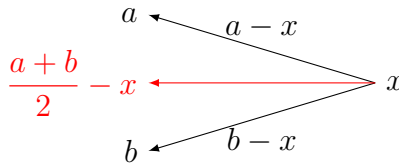


FIGURE 1 – Médiane

Variante : D'après l'identité du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned} 2\|x - a\|^2 + 2\|x - b\|^2 &= \|x - a + x - b\|^2 + \|x - a - (x - b)\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \|a - b\|^2 \end{aligned}$$

d'où
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \|x - a\|^2 - \frac{1}{4}\|a - b\|^2 < \|x - a\|^2$$

et le résultat suit. L'argument est plus élémentaire (mais moins naturel ?) que le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Notons $\alpha = \inf_{y \in C} \|x - y\|$, borne inférieure finie d'une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans $C \cap B_f(x, \alpha + 1)$ qui est un fermé borné de E de dimension finie donc un compact. Il existe alors une extractrice φ telle que

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in C \cap B_f(x, \alpha + 1)$$

et par continuité de la norme

$$\|x - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x - a\| = \alpha$$

Si b est un point de C distinct de a et qui réalise aussi la distance, alors

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\| = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{2} \in C$$

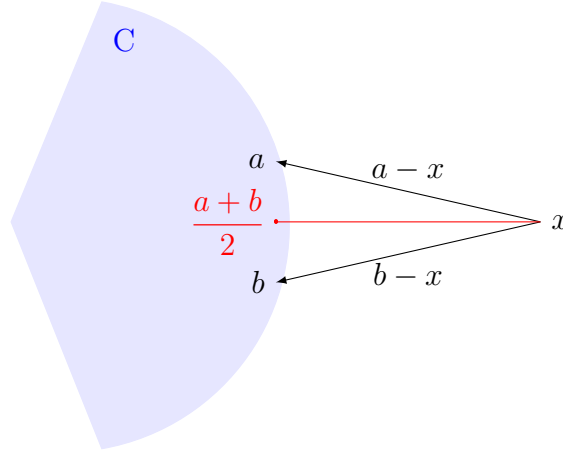


FIGURE 2 – Convexe et médiane

par convexité de C . Ceci est absurde. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } x \in E, \text{ il existe un unique vecteur } a \in C \text{ tel que } \|x - a\| = d(x, C)}$$

3. Soit $x \in E$. Pour $y \in C$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - a + a - y\|^2 = \|x - a\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - a, a - y \rangle}_{\geq 0} + \|a - y\|^2 \geq \|x - a\|^2$$

La distance de x à C est donc réalisée en a autrement dit

$$\boxed{\text{Pour } x \in E \text{ et } a \in C \text{ tel que } \langle x - a, y - a \rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in C, \text{ alors } a = p(x).}$$

4. On pose $z = ty + (1 - t)p(x)$ avec $t \in [0; 1]$. On a $z \in C$ par convexité. Puis

$$\|x - z\|^2 = \|x - p(x) - t(y - p(x))\|^2 = \|x - p(x)\|^2 - 2t \langle x - p(x), y - p(x) \rangle + t^2 \|y - p(x)\|^2$$

$$\text{et} \quad -2 \langle x - p(x), y - p(x) \rangle + t \|y - p(x)\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} -2 \langle x - p(x), y - p(x) \rangle < 0$$

d'où $\|x - z\| < \|x - p(x)\|$ pour t assez proche de 0, ce qui est impossible. Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times C \quad \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0}$$

5. On a

$$\begin{aligned} \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle &= \langle x - p(x) + p(x) - p(y) + p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle \\ &= \langle x - p(x), p(x) - p(y) \rangle + \|p(x) - p(y)\|^2 + \langle p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\langle x - p(x), p(x) - p(y) \rangle = - \langle x - p(x), p(y) - p(x) \rangle \geq 0$$

et

$$\langle p(y) - y, p(x) - p(y) \rangle = - \langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \geq 0$$

D'où

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \geq \|p(x) - p(y)\|^2}$$

Soit $(x, y) \in E^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \leq \|x - y\| \|p(x) - p(y)\|$$

On en déduit

$$\|p(x) - p(y)\| \leq \|x - y\|$$

l'inégalité étant réalisée si $p(x) - p(y) = 0_E$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } p \text{ est continue.}}$$