Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f(e_i) = v$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ avec $v \in \mathrm{E}$.

1. Donner le rang de f.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 (CCINP 2025)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^{x} + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par $\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = p_n$ pour n entier. La fonction génératrice de X est notée $\mathrm{G_X}$ et elle est définie par $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]\,-1\,;1\,[$ est inclus dans l'ensemble de définition de $\mathrm{G_X}$.
2. Soient $\mathrm{X_1}$ et $\mathrm{X_2}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X_1} + \mathrm{X_2}$. Montrer que $\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_{X_1}}(t)\mathrm{G_{X_2}}(t)$ pour $t \in\,]\,-1\,;1\,[$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice $\mathrm{G_X}(t) = \mathbb{E}(t^{\mathrm{X}})$.

   Remarque : On admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotées 2. Soit n entier non nul. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in\,]\,-1\,;1\,[$. Déterminer $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)}$$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to 0$.

Exercice 5 (Mines 2025)

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad f(n) = \prod_{d|n,\ d<n} d$$
Résoudre l'équation $f(n) = n$ d'inconnue n entier avec $n \geqslant 2$.

Exercice 6 (Mines 2025)

1. Soit A réel et f, g continues sur $\mathbb{R}_+$ avec g positive. On suppose
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \leqslant \mathrm{A}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
2. On considère l'équation différentielle
$$x'' + a(t)x = b(t) \qquad (*)$$
avec a, b dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et b et $t \mapsto ta(t)$ intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Soit x une solution de $(*)$.
   (a) Établir
$$\forall t \geqslant 1 \qquad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t (t-u)b(u)\,\mathrm{d}u$$
   (b) On pose
$$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$$
   Montrer qu'il existe $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que
$$\forall t \geqslant 1 \qquad y(t) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^t u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant \mathrm{K}\exp\left(\int_1^{+\infty} u\,|a(u)|\,\mathrm{d}u\right)$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

1. Énoncer les théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 8 (ENS 2025)

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On dit qu'une matrice $\mathrm{M} = \big(m_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *de Bourdaud* si $\chi_{\mathrm{M}} = \displaystyle\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - m_{i,i})$.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.
2. Montrer qu'une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.
3. On dit qu'une matrice réelle A est *normale* si $\mathrm{A}^\top\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^\top$. Déterminer les matrices réelles normales de Bourdaud.