

## Préparation à l'oral - Feuille n°1

### Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in ]a; b[$ . On suppose  $f$  continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; x_0[$  et  $]x_0; b[$ . Montrer que si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  avec

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$$

3. Montrer que l'implication suivante est fautive :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$

On pourra considérer  $g$  définie par  $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  pour  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .

### Exercice 2 (CCINP 2025)

1. On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$  avec  $n \geq 2$  et  $\alpha$  réel.
  - (a) Si  $\alpha \leq 0$ , en utilisant une minoration simple de  $u_n$ , montrer que la série diverge.
  - (b) Si  $\alpha > 0$ , étudier la nature de la série.

2. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n^2 + n)^2}$ .

### Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Établir  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
2. (a) Montrer  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$   
(b) Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ . Montrer  $P$  annulateur de  $u \implies PQ$  annulateur de  $u$
3. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\chi_A$  puis en déduire que  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est annulateur de  $A$ .

### Exercice 4 (Mines 2025)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . Montrer qu'il existe un réel  $\ell$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left( \frac{k}{n} + \varepsilon_k \right) - \ell \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### Exercice 5 (Mines 2025)

On pose  $u = 2 + \sqrt{3}$ ,  $v = 2 - \sqrt{3}$  et pour  $n$  entier

$$M_n = 2^n - 1 \quad s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$$

1. Soit  $n$  entier. Montrer que si l'entier  $M_n$  est premier, alors l'entier  $n$  l'est aussi.

2. Établir  $\forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+1} = s_n^2 - 2$

Qu'en déduit-on sur la suite  $(s_n)_n$  ?

3. On pose  $A = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$  et  $B = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$  avec  $q$  entier non nul. On définit les opérations  $+$  et  $\times$  sur  $B$  par

$$\forall ((x, y), (x', y')) \in B^2 \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + yx')$$

(a) Montrer que le triplet  $(B, +, \times)$  est un anneau commutatif.

(b) On définit  $\pi : A \rightarrow B$  par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \pi(a + \sqrt{3}b) = (\bar{a}, \bar{b})$$

Justifier que l'application  $\pi$  est bien définie et qu'il s'agit d'un morphisme surjectif d'anneaux.

4. Soit  $n$  un nombre premier. Montrer que si  $M_n$  divise  $s_{n-2}$ , alors l'entier  $M_n$  est premier. On pourra procéder par l'absurde et considérer  $q$  le plus petit facteur premier de  $M_n$  et l'ordre de  $(\bar{2}, \bar{1})$  dans  $U(B)$ .

### Exercice 6 (Centrale 2025)

Soit  $(a_n)_n$  une suite complexe. On note  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  pour  $n$  entier.

1. Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et donner une minoration de son rayon de convergence.

2. Montrer que si le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  est égal à 1, alors le rayon de convergence de  $\sum A_n z^n$  est aussi égal à 1. La réciproque est-elle vraie ?

3. Montrer que les séries  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  et  $\sum \frac{A_n}{n!} z^n$  ont même rayon de convergence.

### Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. On dit qu'une partie  $\Omega$  de  $E$  vérifie la propriété (C) si toute fonction continue  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  est constante.

1. Montrer que les connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont exactement les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $\Omega$  une partie de  $E$  connexe par arcs. Montrer que l'ensemble  $\Omega$  vérifie (C).

3. On suppose  $E = \mathbb{R}^2$  et on pose

$$\Omega = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x > 0 \right\} \cup \{0\} \times [-1; 1]$$

(a) Montrer que l'ensemble  $\Omega$  vérifie (C).

(b) Montrer que l'ensemble  $\Omega$  n'est pas connexe par arcs.