Préparation à l'oral - Feuille n°1

Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$. On suppose f continue sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;x_0\,[$ et $]\,x_0\,;b\,[$. Montrer que si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 avec
$$f'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$$
3. Montrer que l'implication suivante est fausse :
$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f' \text{ admet une limite finie en } x_0$$
On pourra considérer g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé : Exercice 4 CCINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ avec $n \geqslant 2$ et α réel.
   (a) Si $\alpha \leqslant 0$, en utilisant une minoration simple de u_n, montrer que la série diverge.
   (b) Si $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\ln(n^2+n)^2}$.

Corrigé : Exercice 5 CCINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Établir $\qquad \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \qquad (\mathrm{PQ})(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u)$
2. (a) Montrer $\qquad \forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2 \qquad \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = \mathrm{Q}(u) \circ \mathrm{P}(u)$
   (b) Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^2$. Montrer
$$\mathrm{P} \text{ annulateur de } u \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{PQ} \text{ annulateur de } u$$
3. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer χ_A puis en déduire que $\mathrm{R} = \mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X}$ est annulateur de A.

Corrigé : Exercice 65 CCPINP 2025

Exercice 4 (Mines 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_k\right)-\ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : Soit n entier non nul. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_k\right) = \frac{\cos(1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\varepsilon_k)\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\frac{\cos(1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(1)\int_0^1 \cos t \,\mathrm{d}t$$

Puis, par inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on trouve pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(\varepsilon_k)\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)^2 \mathbb{E}(\sin(\varepsilon_k)^2) = \frac{\sin(1)^2}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

Enfin, on a

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_k\right)-\ell\right|\right\} \subset \left\{\left|\frac{\cos(1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right)-\ell\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|\ldots| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

On conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_k\right)-\cos(1)\int_0^1 \cos t \,\mathrm{d}t\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

On pose $u = 2+\sqrt{3}$, $v = 2-\sqrt{3}$ et pour n entier

$$\mathrm{M}_n = 2^n - 1 \qquad s_n = u^{2^n} + v^{2^n}$$

1. Soit n entier. Montrer que si l'entier M_n est premier, alors l'entier n l'est aussi.

2. Établir
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad s_{n+1} = s_n^2 - 2$$
Qu'en déduit-on sur la suite $(s_n)_n$?

3. On pose $\mathrm{A} = \mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ et $\mathrm{B} = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ avec q entier non nul. On définit les opérations $+$ et $\times$ sur B par
$$\forall ((x,y),(x',y')) \in \mathrm{B}^2 \quad \begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x', y+y')\\ (x,y)\times(x',y') &= (xx'+3yy', xy'+yx')\end{aligned}$$
   (a) Montrer que le triplet $(\mathrm{B}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
   (b) On définit $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ par
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \pi(a+\sqrt{3}b) = (\bar{a}, \bar{b})$$
   Justifier que l'application π est bien définie et qu'il s'agit d'un morphisme surjectif d'anneaux.

4. Soit n un nombre premier. Montrer que si M_n divise s_{n-2}, alors l'entier M_n est premier. On pourra procéder par l'absurde et considérer q le plus petit facteur premier de M_n et l'ordre de $(\bar{2}, \bar{1})$ dans $\mathrm{U(B)}$.

Corrigé : 1. Supposons $n = ab$ avec a, b entiers > 1. Par factorisation de Bernoulli, on a

$$\mathrm{M}_n = 2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = \underbrace{(2^a - 1)}_{>1} \underbrace{\sum_{k=0}^{b-1} (2^a)^k}_{>1}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{M}_n \in \mathcal{P} \implies n \in \mathcal{P}}$$

2. Soit n entier. On a

$$s_n^2 = \left(u^{2^n} + v^{2^n}\right)^2 = u^{2^{n+1}} + 2(uv)^{2^n} + v^{2^{n+1}} = s_{n+1} + 2$$

D'où
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad s_{n+1} = s_n^2 - 2}$$

En observant $u > 2$ et $v > 0$, on a $s_n > 2$ pour n entier et on en déduit que la suite $(s_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3.(a) L'application $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}+\sqrt{3}\mathbb{Z}, (a, b) \mapsto a+\sqrt{3}b$ est bijective : elle est clairement surjective et on a l'unicité d'une telle écriture par irrationalité de $\sqrt{3}$. On note ψ sa réciproque. Pour (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2$, on a

$$(a + \sqrt{3}b) + (c + \sqrt{3}d) = a + c + \sqrt{3}(b + d) \quad \text{et} \quad (a + \sqrt{3}b)(c + \sqrt{3}d) = ac + 3bd + \sqrt{3}(ad + bc)$$

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ les opérations $+$ et $\times$ par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \times (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$$

Le couple $(\mathbb{Z}^2, +)$ est le groupe produit usuel. La loi $\times$ est interne, de neutre $(1, 0)$ et on a pour (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned}(a, b) \times (c, d) &= \psi(a + \sqrt{3}b)\psi(c + \sqrt{3}d) \\ &= \psi(ac + 3bd + \sqrt{3}(ad + bc)) = \psi((a + \sqrt{3}b)(c + \sqrt{3}d))\end{aligned}$$

Le triplet $(\mathrm{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif comme sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$ et on déduit de la relation ci-avant que la loi $\times$ sur $\mathbb{Z}^2$ est commutative, associative et distributive par rapport à la loi $+$. Enfin, on pose la surjection $\chi : \mathbb{Z}^2 \to \mathrm{B}, (a, b) \mapsto (\bar{a}, \bar{b})$. D'après les propriétés de $x \mapsto \bar{x}$, il vient pour (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{Z}^2$

$$(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d}) = \chi((a, b) + (c + d)) \quad \text{et} \quad (\bar{a}, \bar{b}) \times (\bar{c}, \bar{d}) = \chi((a, b) \times (c, d))$$

On en déduit que la loi $\times$ interne sur B admet pour neutre $(\bar{1}, \bar{0})$, est commutative, associative et distributive par rapport à la loi $+$. On conclut

$$\boxed{\text{Le triplet } (\mathrm{B}, +, \times) \text{ est un anneau commutatif.}}$$

Remarque : Une vérification naïve est possible mais on va exploiter ce qui précède pour la suite.

3.(b) Avec les notations de la question précédente, on a $\pi = \chi \circ \psi$ qui est une composée de morphismes surjectifs d'anneaux et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est bien définie et est un morphisme surjectif d'anneaux.}}$$

4. Soit n un nombre premier tel que M_n divise s_{n-2}. On suppose M_n non premier et soit q le plus facteur premier de M_n. On a $q^2 \leqslant \mathrm{M}_n$ et $q | \mathrm{M}_n$ d'où $q | s_{n-2}$. Il s'ensuit que $\pi(s_{n-2}) = (\bar{0}, \bar{0})$. Par ailleurs, on a $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ d'où

$$(\bar{2}, \bar{1}) \times (\bar{2}, -\bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

ce qui prouve $(\bar{2}, \bar{1}) \in \mathrm{U(B)}$ et $(\bar{2}, -\bar{1}) \in \mathrm{U(B)}$. On observe

$$\begin{aligned} s_{n-2} &= (2+\sqrt{3})^{2^{n-2}} + (2-\sqrt{3})^{2^{n-2}} \\ &= (2-\sqrt{3})^{2^{n-2}}\left(1+((2+\sqrt{3})^2)^{2^{n-2}}\right) \\ s_{n-2} &= v^{2^{n-2}}\left(1+u^{2^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

d'où
$$\pi(s_{n-2}) = (\bar{2},-\bar{1})^{2^{n-2}}\left((\bar{1},\bar{0})+(\bar{2},\bar{1})^{2^{n-1}}\right)$$

Par inversibilité de $(\bar{2},-\bar{1})$, on déduit de $\pi(s_{n-2})=(\bar{0},\bar{0})$ l'égalité
$$(\bar{2},\bar{1})^{2^{n-1}} = (-\bar{1},\bar{0})$$

d'où
$$(\bar{2},\bar{1})^{2^{n}} = (\bar{1},\bar{0})$$

On en déduit que $o((\bar{2},\bar{1}))$ divise 2^n. C'est donc une puissance de 2 et ce n'est pas 2^{n-1} d'où $o((\bar{2},\bar{1}))=2^n$. Mais, on a
$$2^n = o((\bar{2},\bar{1})) \leqslant \text{Card U(B)} \leqslant q^2-1 < \text{M}_n = 2^n-1$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Soit } n \text{ nombre premier tel que M}_n \text{ divise } s_{n-2}\text{. Alors, le nombre M}_n \text{ est premier.}}$$

Remarque : Il s'agit de la condition suffisante du *test de primalité de Lucas-Lehmer* pour les nombres de Mersenne.

Exercice 6 (Centrale 2025)

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe. On note $\text{A}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ pour n entier.

1. Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et donner une minoration de son rayon de convergence.
2. Montrer que si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à 1, alors le rayon de convergence de $\sum \text{A}_n z^n$ est aussi égal à 1. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que les séries $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum \dfrac{\text{A}_n}{n!} z^n$ ont même rayon de convergence.

Corrigé : 1. Voir cours.

2. Notons R le rayon de convergence de $\sum \text{A}_n z^n$. La série entière $\sum \text{A}_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum z^n$ et $\sum a_n z^n$. D'après le théorème du produit de Cauchy de séries entières, on a $\text{R} \geqslant 1$. Soit $r \in [\,0\,;\text{R}\,[$. On a
$$a_n r^n = (\text{A}_n - \text{A}_{n-1})r^n = \text{A}_n r^n - r\text{A}_{n-1}r^{n-1} = \text{O}(1)$$

Ainsi
$$r < \text{R} \implies r \leqslant 1$$

ce qui prouve $\text{R} \leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \textstyle\sum \text{A}_n z^n \text{ est égal à 1.}}$$

Avec $a_0 = 1$ et $a_n = 0$ pour n entier non nul, la série $\sum \text{A}_n z^n = \sum z^n$ est de rayon de convergence égal à 1 mais la série $\sum a_n z^n = 1$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$. Ainsi

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

3. On note R_1 le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ et R_2 celui de $\sum \frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n$. On suppose $\mathrm{R}_2 > 0$. La série $\sum n \frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n$ est de rayon de convergence égal à R_2. Pour $r \in [\,0\,;\mathrm{R}_2\,[$, on a

$$n \frac{\mathrm{A}_n}{n!} r^n = \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(n-1)!} r^n = \mathrm{O}(1)$$

d'où
$$\frac{1}{(n-1)!} (\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1})\, r^n = \frac{a_n}{(n-1)!} r^n = \mathrm{O}(1)$$

et par conséquent
$$\frac{a_n}{n!} r^n = \mathrm{O}(1)$$

ce qui prouve $r \leqslant \mathrm{R}_1$. On a donc $\mathrm{R}_2 \leqslant \mathrm{R}_1$. On suppose $\mathrm{R}_1 > 0$. Soit $r \in [\,0\,;\mathrm{R}_1\,[$ et $\rho \in \,]\,r\,;\mathrm{R}_1\,[$. On a $\frac{a_n}{n!} r^n = \mathrm{O}(1)$ d'où l'existence de $\mathrm{C} \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leqslant \frac{\mathrm{C} n!}{\rho^n}$$

Soit n entier. Il vient

$$|\mathrm{A}_n| \frac{r^n}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \frac{r^n}{n!} \leqslant \mathrm{C} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{\rho^k} \frac{r^n}{n!}$$

On pose
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \beta_k = \frac{r^k}{k!}$$

On a
$$\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{r}{k+1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

ce qui prouve que la suite $(\beta_k)_k$ décroît à partir d'un certain rang $\mathrm{N}+1$ avec N entier. Notant $q = r/\rho$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{\rho^k} \frac{r^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} q^k \frac{\beta_n}{\beta_k} \leqslant \beta_n \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{q^k}{\beta_k} + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} q^k \leqslant \beta_n \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{q^k}{\beta_k} + \frac{1}{1-q}$$

Comme la suite $(\beta_n)_n$ est de limite nulle comme terme général d'une série convergente, on en déduit

$$\mathrm{A}_n \frac{r^n}{n!} = \mathrm{O}(1)$$

d'où $r \leqslant \mathrm{R}_2$ et par suite $\mathrm{R}_1 \leqslant \mathrm{R}_2$. En particulier, on a $\mathrm{R}_1 > 0$ si et seulement si $\mathrm{R}_2 > 0$ d'où $\mathrm{R}_1 = 0$ si et seulement si $\mathrm{R}_2 = 0$. Dans tous les cas, on conclut

$$\boxed{\text{Les séries } \sum \frac{a_n}{n!} z^n \text{ et } \sum \frac{\mathrm{A}_n}{n!} z^n \text{ ont même rayon de convergence.}}$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit qu'une partie Ω de E vérifie la propriété (C) si toute fonction continue $f : \Omega \to \{0,1\}$ est constante.

1. Montrer que les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Soit Ω une partie de E connexe par arcs. Montrer que l'ensemble Ω vérifie (C).
3. On suppose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\Omega = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x > 0 \right\} \cup \{0\} \times [\,-1\,;1\,]$$

(a) Montrer que l'ensemble Ω vérifie (C).

(b) Montrer que l'ensemble Ω n'est pas connexe par arcs.

Corrigé : 1. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes donc connexes par arcs. Réciproquement, soit I partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ avec $a \leqslant b$. Il existe $\varphi \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathrm{I})$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$[\,a\,;b\,] = [\,\varphi(0)\,;\varphi(1)\,] \subset \varphi([\,0\,;1\,]) \subset \mathrm{I}$$

Ainsi $\boxed{\text{Les connexes par arcs de } \mathbb{R} \text{ sont exactement les intervalles de } \mathbb{R}.}$

2. Soit $f : \Omega \to \{0,1\}$ continue. Comme l'ensemble Ω est connexe par arcs, son image directe $f(\Omega)$ l'est aussi et par conséquent, on a $f(\Omega) = \{0\}$ ou $f(\Omega) = \{1\}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega \text{ vérifie (C).}}$$

3.(a) On pose $\qquad \Omega_1 = \left\{\left(x, \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right), x > 0\right\} \quad$ et $\quad \Omega_2 = \{0\} \times [\,-1\,;1\,]$

L'ensemble Ω_1 est connexe par arcs comme image directe de $]\,0\,;+\infty\,[$ par l'application continue $x \mapsto \left(x, \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ et l'ensemble Ω_2 est un segment donc connexe par arcs. Soit $f : \Omega \to \{0,1\}$ continue. On a $f_{|\Omega_1}$ et $f_{|\Omega_2}$ constantes d'après le résultat de la question précédente. Supposons, sans perte de généralité, qu'il existe $\alpha \in [\,-1\,;1\,]$ tel que $f(0,\alpha) = 0$ et $\beta > 0$ tel que $f\left(\beta, \sin\left(\dfrac{1}{\beta}\right)\right) = 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad t_n = \frac{1}{\operatorname{Arcsin}(\alpha) + 2n\pi}$$

On a
$$\left(t_n, \sin\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,\alpha)$$

d'où, par continuité
$$f\left(t_n, \sin\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0,\alpha)$$

Or, on a $f_{|\Omega_1}$ constante égale à $f\left(\beta, \sin\left(\dfrac{1}{\beta}\right)\right) = 1$ d'où

$$1 = f\left(t_n, \sin\left(\frac{1}{t_n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0,\alpha) = 0$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega \text{ vérifie (C)}}$$

3.(b) Supposons que l'ensemble Ω est connexe par arcs. Soit $\alpha \in [\,-1\,;1\,]$ et $\beta > 0$. On dispose de $\varphi : [\,0\,;1\,] \to \Omega$, continue telle que $\varphi(0) = (0,\alpha)$ et $\varphi(1) = \left(\beta, \sin\left(\dfrac{1}{\beta}\right)\right)$. On note $\varphi = (x,y)$ avec x, y les applications coordonnées de φ qui sont également continues. L'ensemble $\{t \in [\,0\,;1\,] \mid x(t) = 0\}$ est une partie non vide majorée. On pose $t_0 = \operatorname{Sup}\{t \in [\,0\,;1\,] \mid x(t) = 0\}$. On a $x(t_0) = 0$ par continuité de x. Soit $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$. Par continuité de y, on dispose de $\eta \in \,]\,0\,;1 - t_0\,[$ tel que

$$\forall t \in [\,t_0\,;t_0+\eta\,] \qquad |y(t) - y(t_0)| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit
$$\forall t \in [\,t_0\,;t_0+\eta\,] \qquad y(t_0) - \varepsilon \leqslant y(t) \leqslant y(t_0) + \varepsilon$$

ce qui signifie que y est « contraint » dans un intervalle d'amplitude 2ε sur $[\,t_0\,;t_0+\eta\,]$. Par ailleurs, on a $x(t_0+\eta)>0$ par définition de t_0. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \qquad b_n = \frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$$

On choisit n assez grand pour avoir $[\,a_n\,;b_n\,] \subset [\,0\,;x(t_0+\eta)\,]$. Ainsi, on a d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$[\,a_n\,;b_n\,] \subset [\,x(t_0)\,;x(t_0+\eta)\,] \subset x([\,t_0\,;t_0+\eta\,])$$

On dispose de u_n et v_n dans $[\,t_0\,;t_0+\eta\,]$ tels que $x(u_n)=a_n$ et $x(v_n)=b_n$. Comme $x(u_n)>0$ et $x(v_n)>0$, on trouve

$$y(u_n)=\sin\left(\frac{1}{x(u_n)}\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1 \quad \text{et} \quad y(v_n)=\sin\left(\frac{1}{x(v_n)}\right)=\sin\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

Supposant $u_n \leqslant v_n$ sans perte de généralité, on a donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$[\,-1\,;1\,]=[\,y(v_n)\,;y(u_n)\,] \subset y\left([\,u_n\,;v_n\,]\right)$$

ce qui contredit le fait que y est à valeurs dans un intervalle d'amplitude 2ε sur $[\,t_0\,;t_0+\eta\,]$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Omega \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$