

Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D le domaine de convergence et S la somme définie sur D. L'application S est-elle continue sur D?
2. Établir la convergence normale de la série entière $\sum_{n \geq 2} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$ sur $[-1; 1]$.
3. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)S(x)$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad u_n(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$

Pour $|x| > 1$, on a $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$

d'où la divergence grossière de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$. Pour $|x| < 1$, on a

$$|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = o(|x|^n)$$

d'où la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ par comparaison. Si $x = 1$, on a

$$u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(1)$ diverge. Puis, on peut observer que la fonction sin est croissante sur $[0; 1] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par conséquent, la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, on en déduit la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n(-1)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Le domaine de convergence est } D = [-1; 1[.}$$

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ est égal à 1. On en déduit que la fonction somme est continue sur $] -1; 1[$. Par ailleurs, il vient par contrôle du reste de série alternée

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [-1; 0] \quad |R_n(x)| \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) |x|^{n+1} \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

d'où $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1; 0]$ et on conclut

$$\boxed{\text{La somme S est continue sur D.}}$$

2. On pose

$$\forall (n, x) \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket \times [-1; 1] \quad v_n(x) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$$

La fonction sin est 1-lipschitzienne et il vient pour $n \geq 2$ et $x \in [-1; 1]$

$$|v_n(x)| \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et après simplification avec l'expression conjuguée, on obtient

$$\|v_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Par critère de Riemann, on conclut

La série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$.

3. Soit $x \in [-1; 1[$. Il vient après changement d'indice et linéarité du symbole somme car convergence

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n \\ &= \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x) \end{aligned}$$

Or la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1; 1]$

et sa somme est donc continue sur cet intervalle. Ainsi

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(1) = \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right)$$

et après télescopage, on conclut

$$(1-x)S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$$

Exercice 2 (Centrale 2022)

Soit n entier non nul et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$ et de la norme euclidienne associée. On pose $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = (\text{Tr}(M) \quad \text{Tr}(M^2) \quad \dots \quad \text{Tr}(M^n))$$

1. (a) Établir $\forall (A, B) \in E^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\forall A \in E \quad |\text{Tr}(A)| \leq \alpha \|A\|$$

2. Montrer que f est différentiable et déterminer $df(M)$ pour $M \in E$.

3. (a) Montrer $\forall M \in E \quad \text{rg } df(M) = \text{deg } \pi_M$

(b) En déduire que l'ensemble des matrices de E dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de E .

Corrigé : 1.(a) L'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . Il en résulte que $M \mapsto \sqrt{\text{Tr}(M^\top M)}$ est une norme sur E . Soit $(A, B) \in E^2$ et $C = AB$. On a $\|C\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n , il vient

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right)$$

Ainsi $\|C\|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \right] = \left(\sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{1 \leq k, j \leq n} b_{k,j}^2 \right)$

On conclut

$$L'application M \mapsto \sqrt{\text{Tr}(M^\top M)} \text{ est une norme sous-multiplicative sur } E.$$

1.(b) Soit $A \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\text{Tr}(A)| = |\langle I_n, A \rangle| \leq \|I_n\| \|A\|$$

Ainsi

$$\forall A \in A \quad |\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$$

2. Notons $\varphi_k : M \rightarrow \text{Tr}(M^k)$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'application φ_k est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $\varphi_k \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$(M + H)^k = M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1} + R$$

avec R une somme de produits qui contient au moins deux occurrences de H . Avec l'inégalité établie à la question 1.(b), il en résulte que $|\text{Tr}(R)| = o(\|H\|)$ et on en déduit

$$\varphi_k(M + H) = \text{Tr}(M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1}) + o(H)$$

d'où $\forall (M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad d(\varphi_k)(M) \cdot H = k \text{Tr}(M^{k-1}H)$

Par suite

$$\forall (M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad df(M) \cdot H = (\text{Tr}(H) \quad 2 \text{Tr}(MH) \quad \dots \quad n \text{Tr}(M^{n-1}H))$$

3.(a) Soit $M \in E$. On a

$$\begin{aligned}
H \in \text{Ker } df(M) &\iff \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket & \text{Tr}(M^k H) = 0 \\
&\iff \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket & \langle (M^\top)^k, H \rangle = 0 \\
H \in \text{Ker } df(M) &\iff H \in \text{Vect} \left(I_n, M^\top, \dots, (M^\top)^{n-1} \right)^\perp
\end{aligned}$$

On note $d = \deg \pi_{M^\top}$. On a

$$\mathbb{R}[M^\top] = \mathbb{R}_{d-1}[M^\top] \subset \mathbb{R}_{n-1}[M^\top] \subset \mathbb{R}[M^\top]$$

ce qui prouve que les inclusions sont des égalités et $(I_n, \dots, (M^\top)^{d-1})$ est libre. Ainsi, on a

$$H \in \text{Ker } df(M) \iff H \in \mathbb{R}_{d-1}[M]^\perp$$

d'où $\dim \text{Ker } df(M) = \dim \mathbb{R}_{d-1}[M]^\perp = \dim E - \dim \mathbb{R}_{d-1}[M] = \dim E - \deg \pi_{M^\top}$

et d'après le théorème du rang $\text{rg } df(M) = \deg \pi_{M^\top}$

Enfin, on a $\pi_M(M) = 0$ et en transposant cette égalité, on trouve $\pi_M(M^\top) = 0$ d'où π_{M^\top} divise π_M et de même π_M divise π_{M^\top} par symétrie des rôles entre M et M^\top . Les polynômes minimaux π_M et π_{M^\top} sont associés, unitaires d'où $\pi_M = \pi_{M^\top}$ et on conclut

$$\boxed{\forall M \in E \quad \text{rg } df(M) = \deg \pi_M}$$

3.(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_A = n$. D'après ce qui précède, on a $\text{rg } df(A) = n$. Notant $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n , il existe une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ extraite de $\text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} df(A)$. Soit I la plage d'indices d'extraction des colonnes. On considère $\Phi : M \rightarrow \det(\text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} df(M))_{(i,j) \in I \times \llbracket 1; n \rrbracket}$. L'ensemble $U = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue avec $A \in U$ et tout élément de U est de rang supérieur ou égal à n et donc égal à n . On conclut

$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont le polynôme minimal est de degré } n \text{ est un ouvert.}}$

Exercice 3 (Centrale 2024)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire X notée F_X par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer

$$\text{la fonction } F_X \text{ croît et } F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Soit E une partie dénombrable de \mathbb{R} et soient X et $(X_n)_n$ des variables aléatoires à valeurs dans E . On suppose

$$\forall x \in E \quad \mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = x)$$

2. Montrer

$$\sum_{x \in E} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. Montrer que la suite $(F_{X_n})_n$ converge uniformément vers F_X .

Corrigé : 1. Soit $x \leq y$. On a $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ d'où la croissance de F_X par croissance de \mathbb{P} . La fonction F_X est croissante bornée donc admet une limite finie en $+\infty$ par limite monotone. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(n)$$

La famille $(\{X \leq n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion d'où, par continuité croissante,

$$F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X \leq n\}\right) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$$

On conclut

$$\boxed{F_X \text{ croît et } F_X(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$$

2. On note $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et on pose

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = x_k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

Par propriété des sommes de termes positifs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{x \in E} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k|$$

On observe pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$

$$|p_{n,k} - p_k| = p_{n,k} + p_k - 2u_k(n) \quad \text{avec} \quad u_k(n) = \min(p_{n,k}, p_k)$$

Chaque terme est un terme de série convergence et il vient par linéarité du symbole somme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{+\infty} p_k - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$$

On a

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad 0 \leq u_k(n) \leq p_k$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_k$. Comme on a $u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient par double limite

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{x \in E} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

3. Soit $y \in E$. Par linéarité du symbole somme et inégalité triangulaire pour des familles sommables, il vient

$$\begin{aligned} |F_{X_n}(y) - F_X(y)| &= \left| \sum_{x \in E, x \leq y} \mathbb{P}(X_n = x) - \sum_{x \in E, x \leq y} \mathbb{P}(X = x) \right| \\ &= \left| \sum_{x \in E, x \leq y} (\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)) \right| \leq \sum_{x \in E, x \leq y} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)| \end{aligned}$$

d'où

$$\|F_{X_n} - F_X\|_\infty \leq \sum_{x \in E} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X = x)|$$

Ainsi

$$\boxed{\|F_{X_n} - F_X\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 4 (Mines 2024)

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On note

$$r^+(P) = \text{Card } P^{-1}(\{0\}) \cap]0; +\infty[\quad \text{et} \quad N(P) = \text{Card } \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

1. Que dire de P si $N(P) = 1$? $N(P) = 2$?
2. On suppose P non constant. Montrer

$$r^+(P) \leq r^+(P') + 1$$

3. On suppose $P(0) = 0$. Montrer $r^+(P) \leq r^+(P')$

4. Montrer $r^+(P) \leq N(P) - 1$

5. Soit n entier, des réels $0 < x_1 < \dots < x_n$ et des entiers $0 \leq p_1 < \dots < p_n$. Montrer

$$\det (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

Corrigé : 1. Si $N(P) = 1$, on a $P = \alpha X^n$ avec $\alpha \neq 0$ et si $N(P) = 2$, on a $P = \alpha X^n + \beta X^p$ avec $n > p$ et α, β non nuls d'où

$$\boxed{\text{Si } N(P) = 1, \text{ alors } r^+(P) = 0 \text{ et si } N(P) = 2, \text{ alors } r^+(P) = 1 \text{ si } \alpha\beta < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

2. On note $r = r^+(P)$ et $x_1 < \dots < x_r$ les racines de P dans $]0; +\infty[$. D'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $x \mapsto P(x)$ dérivable sur \mathbb{R} , il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$. Ainsi, on a

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < y_r$$

On en déduit $r^+(P') \geq r - 1$, autrement dit

$$\boxed{r^+(P) \leq r^+(P') + 1}$$

3. On note $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1}$ les racines de P dans $[0; +\infty[$. Toujours d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_{i-1}; x_i[$ pour tout $i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$. Ainsi, on a

$$0 = x_0 < y_1 < x_1 < \dots < y_{r-1} < x_{r-1}$$

On en déduit $r^+(P') \geq r - 1$ et on remarque $r - 1 = r^+(P)$ d'où

$$\boxed{\text{Si } P(0) = 0, \text{ alors } r^+(P) \leq r^+(P')}$$

4. On procède par récurrence sur $N(P)$. L'inégalité est satisfaite pour $N(P) = 1$. On la suppose vraie pour tout polynôme Q jusqu'à un rang $N(Q) = p - 1$ entier non nul fixé. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $N(P) = p$. On note

$$\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} = \{k_0, \dots, k_{p-1}\} \quad \text{avec} \quad 0 \leq k_0 < \dots < k_{p-1}$$

d'où $P = a_{k_0} X^{k_0} + \dots + a_{k_{p-1}} X^{k_{p-1}} = X^{k_0} Q$ avec $Q = a_{k_0} + \dots + a_{k_{p-1}} X^{k_{p-1}-k_0}$

On a $N(P) = N(Q)$ et $r^+(P) = r^+(Q)$

Par ailleurs, comme $Q(0) \neq 0$, on trouve

$$N(Q') = N(Q) - 1 < N(P) \quad \text{et} \quad r^+(Q) \leq r^+(Q') + 1$$

et par hypothèse de récurrence, il vient $r^+(Q') \leq N(Q') - 1$ d'où

$$r^+(P) = r^+(Q) \leq N(Q') - 1 + 1 = N(Q') = N(Q) - 1 = N(P) - 1$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc établi

$$\boxed{r^+(\mathbf{P}) \leq N(\mathbf{P}) - 1}$$

5. On note $A = (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Supposons A non inversible. On dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ où C_j désigne la j -ième colonne de A . Ainsi, notant $P = \sum_{j=1}^n \lambda_j X^{p_j}$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(x_i) = 0$$

d'où

$$r^+(\mathbf{P}) \geq n \quad \text{et} \quad N(\mathbf{P}) \leq n$$

ce qui contredit l'inégalité établie à la question précédente. On conclut

$$\boxed{\det (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2021)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

1. Montrer que F et G sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
2. Pour x réel, déterminer $F'(x)$ en fonction de $G(x)$ et $G'(x)$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0 \quad g(t) = e^{-t^2}$$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I = [0; 1]$. La fonction G est une primitive de la fonction continue g . Puis, on vérifie :

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I . La fonction F est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

Les fonctions F et G sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Remarque : On a $\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2|x|e^{-x^2} \leq \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxé inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$F'(x) + (G^2)'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Le changement de variable $u = xt$ (pour $x \neq 0$) dans la première intégrale permet d'obtenir

$$F' + (G^2)' = 0$$

Remarque : L'égalité vaut trivialement en $x = 0$.

3. La fonction $F + G^2$ de dérivée nulle sur l'intervalle \mathbb{R} est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (F + G^2)(x) = (F + G^2)(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\forall (x, t) \in X \times I \quad 0 \leq f(x, t) \leq e^{-x^2}$

D'où, après intégration $\forall x \in X \quad 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$

et par encadrement $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi $G(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} + o(1)$

On conclut

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
--

Exercice 6 (Mines-Telecom 2021)

Soit E euclidien. On note

$$\mathcal{A}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle\}$$

1. Soit $f \in \mathcal{A}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E . Que peut-on dire de $\text{mat}_{\mathcal{B}}f$?
2. On suppose $\dim E = 2$ et note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$. Montrer que $\mathcal{C}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathcal{A}(E)$.

Corrigé : 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}f = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i \rangle = -\langle e_j, f(e_i) \rangle = -a_{j,i}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

2. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . L'application $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), u \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}u$ étant un isomorphisme, le problème équivaut à résoudre l'équation matricielle

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qui équivaut à

$$a = d, \quad b = -c$$

Ainsi

$$f \in \mathcal{C}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \iff \text{mat}_{\mathcal{B}}f \in \text{Vect}(I_2, E_{2,1} - E_{1,2})$$

On conclut

$$\boxed{\mathcal{C}(E) \text{ est un sev de } \mathcal{L}(E) \text{ contenant } \mathcal{A}(E).$$

Exercice 7 (Mines-Telecom 2024)

Quel est le nombre d'applications $f : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$?

Corrigé : Soit f une telle application. On note $\text{Im } f = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on dispose de $x_i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $f(x_i) = y_i$ et

$$f(y_i) = (f \circ f)(x_i) = f(x_i) = y_i$$

ce qui signifie que les y_i sont points fixes de f . Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{Im } f \quad f(x) \in \{y_1, \dots, y_p\}$$

et il n'y a pas d'autre contrainte puisque pour $x \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{Im } f$, on dispose de $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ tel que $f(x) = y_i$ puis

$$(f \circ f)(x) = f(y_i) = y_i = f(x)$$

ce qui correspond à choisir une application de $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{Im } f$ dans $\text{Im } f$. Ainsi, le nombre d'applications vérifiant la condition imposée consiste à choisir p points fixes dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ (l'ensemble d'arrivée n'est pas vide) qui vont constituer $\text{Im } f$ ce qui fait $\binom{n}{p}$ choix puis une application de $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{Im } f$ dans $\text{Im } f$ ce qui fait p^{n-p} et ceci pour p variant de $\llbracket 1; n \rrbracket$ par union disjointe selon le cardinal de $\text{Im } f$. Formellement, on obtient

$$\{f \in \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; n \rrbracket} \mid f \circ f = f\} =$$

$$\bigsqcup_{p=1}^n \bigsqcup_{I \subset \llbracket 1; n \rrbracket \mid \text{Card } I=p} \{f \in \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; n \rrbracket} \mid \forall x \in I \quad f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \notin I \quad f(x) \in I\}$$

On conclut

$$\text{Card } \{f \in \llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; n \rrbracket} \mid f \circ f = f\} = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} p^{n-p}$$

Exercice 8 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un \mathbb{R} -ev normé de dimension finie et soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in E$, la suite $(\|u_n - x\|)_n$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Corrigé : 1. La suite $(\|u_n\|_n)$ est convergente donc bornée. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans une boule fermée $B_f(0, R)$ avec $R \geq 0$ qui est un fermé borné dans un espace de dimension finie et est donc compacte. Par conséquent

La suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

2. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in E$. Par hypothèse, on dispose de $c \geq 0$ tel que

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$$

Par extraction, il vient

$$\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$$

et on déduit $c = 0$ par unicité de la limite. On conclut

La suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 9 (Mines 2017)

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Corrigé : On a
$$\ln \left(\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Avec le développement limité usuel

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$$

il vient
$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^n O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

D'après le théorème sur les séries alternées et le critère de Riemann, on a

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \sum O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ convergent}$$

En considérant la série télescopique $\sum_{n \geq 2} [u_n - u_{n-1}]$ avec $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ pour n entier non nul, on établit

$$u_n - u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série télescopique $\sum_{n \geq 2} [u_n - u_{n-1}]$ et donc la convergence de la suite u_n .

Ainsi
$$-\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^n O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) = -\frac{1}{2} \ln n + C^{\text{te}} + o(1)$$

Et en passant à l'exponentielle

$$\boxed{\prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{e^{C^{\text{te}} + o(1)}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{n}} \text{ avec } C > 0}$$

Exercice 10 (Mines 2019)

Soit E un \mathbb{K} -evn. Montrer que l'espace E et la boule $B(0, 1)$ sont homéomorphes, *i.e.* qu'il existe une bijection continue entre les deux ensembles et de réciproque continue.

Corrigé : On pose $\forall x \in E \quad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$

L'application f est clairement à valeurs dans $B(0, 1)$, continue comme composée de telles fonctions. Soit $y \in B(0, 1)$. Considérons l'équation $y = f(x)$. On a

$$y = f(x) \iff y(1 + \|x\|) = x$$

En passant à la norme, il vient

$$\|y\|(1 + \|x\|) = \|x\|$$

d'où $\|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}$

Ainsi $y = f(x) \iff \begin{cases} y(1 + \|x\|) = x \\ \|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} \end{cases} \iff x = \frac{y}{1 - \|y\|}$

Ceci prouve le caractère bijectif de f avec

$$\forall y \in B(0, 1) \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$$

L'application f^{-1} est continue comme composée de telles fonctions et on conclut

L'espace E et la boule $B(0, 1)$ sont homéomorphes.

Exercice 11 (Mines 2023)

Pour n entier ≥ 2 , on pose

$$\forall x \in [0; 1] \quad f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0; 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ puis montrer sa convergence.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ puis un équivalent simple de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$;

Corrigé : 1. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est dérivable sur $[0; 1]$ avec

$$\forall x \in [0; 1] \quad f'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

ce qui prouve que la fonction f_n décroît strictement sur $[0; 1]$ et comme on a $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leq 0$, on en déduit que la fonction f_n réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[2 - n; 1]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 2, \text{ il existe un unique } x_n \in [0; 1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

2. Soit $x \in [0; 1]$ et $n \geq 2$. On a

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 \leq x^n - nx + 1 = f_n(x)$$

d'où

$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$$

et par décroissance stricte de f_n , on obtient $x_n \geq x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est minorée par zéro et par limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n \geq 2} \text{ est décroissante et convergente.}}$$

3. On a

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq nx_n = 1 + x_n^n \leq 2$$

d'où

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$$

Ainsi

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Puis, on observe

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq x_n^n \leq x_n = o(1)$$

Ainsi

$$nx_n = 1 + x_n^n = 1 + o(1)$$

On conclut

$$\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Remarque : On n'utilise pas le résultat de la question précédente.

4. Soit $n \geq 2$. On a $x_n^n = nx_n - 1$ d'où

$$1 = x_n^{-n}(nx_n - 1)$$

puis

$$-n \ln(x_n) + \ln(nx_n - 1) = 0$$

Par ailleurs, on a

$$n \ln(n) + n \ln(x_n) = n \ln(nx_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(nx_n - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n^n = \exp\left(n \left(\ln(x_n) + \frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = o(1)$$

Ainsi

$$n \ln n + \ln(nx_n - 1) = o(1)$$

d'où, par continuité de l'exponentielle

$$n^n (nx_n - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Ainsi

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 12 (Mines-Telecom 2022)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.
2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Pour $t \in [0; 1[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$$

avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $[0; 1[$. Par convergence dominée, il vient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 dt = 1}$$

2. Puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n - 1 = - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$

Pour n entier non nul, on pose $u = t^n$. Il vient

$$I_n - 1 = - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} du$$

Pour $u \in]0; 1]$, on a

$$\frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{1+u} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \leq 1$$

Comme $v \mapsto 1$ est intégrable sur $]0; 1]$, il vient par convergence dominée

$$n(I_n - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} - \int_0^1 \frac{du}{1+u} = -\ln(2)$$

Ainsi

$$\boxed{I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Variante : On peut aussi réaliser une intégration par parties sur $I_n - 1$ avec n entier non nul. On a

$$I_n - 1 = - \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n} t dt = - \left[\frac{t}{n} \ln(1+t^n) \right]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$, on établit que l'intégrale est de limite nulle et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 13 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}$.

1. Montrer que $\dim E$ est paire.
2. Montrer que $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f pour tout $x \in E$.
3. On suppose $\dim E = 2n$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, \dots, e_n de E tels que $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ est une base de E et préciser $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$.

Corrigé : 1. On a $\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\text{id}) = (-1)^{\dim E}$

Comme un réel au carré est positif, on conclut

La dimension de E est paire.

2. Soit $x \in E$. Pour α, β réels, il vient

$$f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) - \beta x \in \text{Vect}(x, f(x))$$

Ainsi

Pour $x \in E$, le sev $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f .

3. On construit la suite (e_1, \dots, e_n) par récurrence. On choisit $e_1 \neq 0_E$. Supposons $(e_1, f(e_1))$ liée. Comme le vecteur e_1 n'est pas nul, on a $f(e_1)$ colinéaire à e_1 ce qui signifie e_1 vecteur propre de f et qui est absurde puisque le spectre réel de f est vide, le polynôme $X^2 + 1$ étant annulateur de f . On suppose avoir construit $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$ famille libre avec $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. On complète cette famille en $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ famille libre de E . Montrons la liberté de $(e_1, f(e_1), \dots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2(k+1)}$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) = 0_E$. Si $\beta_{k+1} = 0$, on a par hypothèse $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Supposons $\beta_{k+1} \neq 0$. Il vient

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i))\right) = \sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) = 0_E$$

On note $r = \frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}$ et on écrit la combinaison

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) - r \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) = \\ \sum_{i=1}^k [(-\beta_i - r\alpha_i) e_i + (\alpha_i - r\beta_i) f(e_i)] - (\beta_{k+1} - r\alpha_{k+1}) e_{k+1} = 0_E \end{aligned}$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), \dots, e_{k+1})$, il vient

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \begin{cases} \beta_i + r\alpha_i = 0 \\ \alpha_i - r\beta_i = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_{k+1}^2 + \alpha_{k+1}^2 = 0$$

d'où $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad \alpha_i(1+r^2) = \beta_i(1+r^2) = 0$ et $\beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = 0$

et on en déduit la nullité de tous les coefficients. On construit alors la suite (e_1, \dots, e_n) selon le procédé décrit ci-avant. La famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ est libre de cardinal égal à $\dim E$.

Ainsi

Il existe une base de E de la forme $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ avec les e_i dans E et $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(A, \dots, A)$ avec $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$.

Exercice 14 (Mines 2022)

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour p entier non nul et $f \in E$, on pose

$$N_p(f) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p e^{-|t|} f(t)|$$

1. Soit p entier non nul. Montrer que N_p est une norme sur E .
2. Soit c réel et p entier non nul. Étudier la continuité de l'application $\Phi_c : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$ pour la norme N_p .
3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Corrigé : 1. Soit p entier non nul et $f \in E$. On a $t^p e^{-|t|} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$ par croissances comparées.

On en déduit que $t \mapsto t^p e^{-|t|} f(t)$ est bornée sur \mathbb{R} et la quantité N_p est donc bien définie. On remarque l'égalité

$$N_p(f) = \|t \mapsto t^p e^{-|t|} f(t)\|_\infty$$

Les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire en découlent. Supposons $N_p(f) = 0$. Par séparation de $\|\cdot\|_\infty$, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^p e^{-|t|} f(t) = 0$$

d'où $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et comme la fonction f est continue en particulier en zéro, on obtient $f = 0$. On conclut

L'application N_p est une norme sur E .

2. Soit p entier non nul. Pour c réel, l'application Φ_c évaluation en c est clairement linéaire. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. On a

$$|f(c)| = |c^p e^{-|c|} f(c)| |c^{-p} e^{|c|}|$$

d'où

$$|\Phi_c(f)| \leq |c^{-p} e^{|c|}| N_p(f)$$

ce qui prouve que l'application Φ_c est lipschitzienne en zéro. Supposons ensuite $c = 0$. On pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f_n(t) = e^{-n|t|}$$

Pour n entier, l'application f_n est continue et bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Par parité, on observe

$$N_p(f_n) = \sup_{t \geq 0} t^p e^{-(n+1)t}$$

La fonction $t \mapsto t^p e^{-(n+1)t}$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $t \mapsto t^{p-1} e^{-(n+1)t} [p - (n+1)t]$. On trouve

$$N_p(f_n) = \left(\frac{p}{n+1}\right)^p e^{-p}$$

d'où

$$\frac{|f_n(0)|}{N_p(f_n)} = \left(\frac{n+1}{p}\right)^p e^p \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On conclut

L'application Φ_c est continue si et seulement si $c \in \mathbb{R}^*$.

3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Sans perte de généralité, on suppose $p < q$. Avec la même famille de fonctions $(f_n)_n$ qu'à la question précédente, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{N_p(f_n)}{N_q(f_n)} = \frac{p^p}{q^p} (n+1)^{q-p} e^{q-p} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On conclut

Pour p, q entiers non nuls distincts, les normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Exercice 15 (Mines-Telecom 2021)

1. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Déterminer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que le nombre S est irrationnel.

Corrigé : 1. On reconnaît la série associée à $\cos(1)$ puisque $\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$. Ainsi

La série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et sa somme S vaut $\cos(1)$.

2. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

On a
$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{(2(n+1))!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

et
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!} > 0$$

La suite $(S_{2n})_n$ décroît strictement et la suite $(S_{2n+1})_n$ croît strictement. Or, ces deux suites sont adjacentes puisque $S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et de limite commune S. Ainsi, on a l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n+1} < S < S_{2n}$$

3. Soit n entier. On a
$$S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{1}{(4n+2)!} < S < S_{2n}$$

d'où
$$0 < S_{2n} - S < \frac{1}{(4n+2)!}$$

et ainsi
$$0 < (4n+2)!S_{2n} - (2n+1)!S < 1$$

La quantité $(4n+2)!S_{2n}$ est un entier relatif en tant que somme d'entiers relatifs. Supposons S rationnel, à savoir $S = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Si n est assez grand, alors $(4n+2)! \frac{p}{q}$ est entier (puisque q est facteur d'une factorielle assez grande) et par conséquent, le nombre $(4n+2)!S_{2n} - (2n+1)!S$ est un entier relatif dans $]0; 1[$ ce qui est absurde. On conclut

Le nombre S est irrationnel.

Exercice 16 (Mines-Telecom 2021)

Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale de paramètres n entier non nul et $p \in]0; 1[$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) & X(\omega) \\ Y(\omega) & Y(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & Z(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$$

1. À l'aide de fonctions génératrices, montrer que $S = X + Y + Z$ suit une loi binomiale et préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M et S .
3. Calculer la probabilité que M soit un projecteur.

Corrigé : 1. Soit $t \in [0; 1]$. Par indépendance, il vient

$$G_S(t) = G_X(t)G_Y(t)G_Z(t) = (pt + 1 - p)^{3n}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{S \sim \mathcal{B}(3n, p) \quad \mathbb{E}(S) = 3np \quad \mathbb{V}(S) = 3np(1 - p)}$$

2. On observe
$$M = CU^T \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = C(U^T C)U^T = (X + Y + Z)CU^T$$

On conclut

$$\boxed{M^2 = SM}$$

3. On a

$$\{M \text{ projecteur}\} = \{M^2 = M\} = \{SM = M\} = \{M = 0\} \sqcup \{M \neq 0, S = 1\} = \{S = 0\} \sqcup \{S = 1\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(M \text{ projecteur}) = \mathbb{P}(S = 0) + \mathbb{P}(S = 1)$$

On conclut

$$\boxed{\mathbb{P}(M \text{ projecteur}) = (1 - p)^{3n} + 3np(1 - p)^{3n-1}}$$

Exercice 17 (Mines 2016)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ et on considère $T : E \rightarrow E$ défini par

$$\forall f \in E \quad \forall x \in [0; 1] \quad T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continu de E .
2. Calculer $\sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Corrigé : 1. L'application T est clairement linéaire et à valeurs dans E d'après les théorèmes généraux. Pour $f \in E$, on a

$$\|T(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } T \text{ est un endomorphisme continu de } E.}$$

2. Notons $\|T\| = \sup_{f \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$. D'après le résultat de la question précédente, on a $\|T\| \leq 2$.

Pour $f = \mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1, on trouve

$$\|T(f)\|_\infty = 2 \quad \text{avec} \quad \|f\|_\infty = 1$$

autrement dit, la borne supérieure est atteinte et on a

$$\boxed{\|T\| = 2}$$

3. Pour $f = \mathbf{1}$, on a $T(f) = 2f$ ce qui justifie que $2 \in \text{Sp}(T)$. Soit $f \in E$ tel que $T(f) = 2f$, autrement dit

$$\forall x \in [0; 1] \quad 2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (1)$$

La fonction f est continue sur le segment $[0; 1]$ donc est bornée et y atteint ses bornes. On note α et β les valeurs dans $[0; 1]$ en lesquelles f atteint respectivement son minimum et son maximum. On a

$$2f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq f(\alpha) \quad f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \geq f(\alpha)$$

Si on a $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) > f(\alpha)$ ou $f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) > f(\alpha)$, alors l'égalité précédente n'a pas lieu. Ainsi, on a

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Par récurrence immédiate en réinjectant dans l'égalité (1), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

et par continuité

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)$$

ce qui prouve $f(\alpha) = f(0)$. Le même raisonnement permet d'établir $f(\beta) = f(0)$ et on conclut que f est une fonction constante. Ainsi

$$\boxed{E_2(T) = \text{Vect}(\mathbf{1})}$$

Exercice 18 (Mines-Telecom 2019)

On pose $\forall x > 0 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$

Soit $x > 0$. La série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ vérifie clairement le critère des séries alternées d'où la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur $]0; +\infty[$. Soit $a > 0$. Par contrôle du reste, on trouve

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [a; +\infty[\quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{1+(n+1)a}$$

d'où $\|R_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} u_n$ sur tout segment de $]0; +\infty[$. On conclut

La fonction S est bien définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad v_n(x) = \frac{(-1)^n x}{1+nx}$

La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ vérifie le critère des séries alternées d'où, par contrôle du reste

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[\quad |R_n(x)| \leq \frac{x}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur $]0; +\infty[$ de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ et comme on a

$$v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

on obtient, par théorème de la double limite

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

D'où

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}$$

3. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$$

Pour $x > 0$ fixé, on pose $\forall u > 0 \quad \varphi(u) = \frac{u}{(1+ux)^2}$

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et par dérivation

$$\forall u > 0 \quad \varphi'(u) = \frac{(1+ux)[(1+ux) - 2xu]}{(1+ux)^4} = \frac{(1+ux)(1-xu)}{(1+ux)^3}$$

On en déduit que φ décroît sur $\left[\frac{1}{x}; +\infty\right[$ et par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} u'_n$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang. Ainsi par contrôle du reste d'une série alternée, pour $a > 0$, en observant que pour $x \geq a$, on a l'implication $n \geq 1/a \implies n \geq 1/x$, on obtient alors

$$\forall n \geq \frac{1}{a} \quad \forall x \geq a \quad |R'_n(x)| \leq \frac{(n+1)}{(1+(n+1)x)^2} \leq \frac{(n+1)}{(1+(n+1)a)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} u'_n$ sur tout segment de $]0; +\infty[$ et on conclut

$$\boxed{S \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

Exercice 19 (Mines-Telecom 2018)

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système (S) :
$$\begin{cases} x + y = \bar{4} \\ xy = \bar{10} \end{cases}$$

Corrigé : Comme 11 est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps. Si x et y sont solutions de (S), alors, par substitution, ils sont solutions de $z^2 - 4z + 10 = 0$ [11]. On a

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 10 \equiv 0 [11] &\iff z^2 - 4z - 1 \equiv 0 [11] \\ &\iff (z - 2)^2 - 4^2 \equiv 0 [11] \iff (z + 2)(z - 6) \equiv 0 [11] \iff \bar{z} \in \{-\bar{2}, \bar{6}\} \end{aligned}$$

la dernière équivalence utilisant l'intégrité du corps. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{(S) \iff (x, y) \in \{(-\bar{2}, \bar{6}), (\bar{6}, -\bar{2})\}}$$

Exercice 20 (Centrale 2018)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. On suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre $A = RS$ avec $R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que $d(A, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = d(A, R)$.

(b) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. À l'aide des applications définies sur \mathbb{R} par $\varphi_M : x \mapsto R \exp(xM)$ et $f_M : x \mapsto \|A - \varphi_M(x)\|^2$, montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = RS$.

Corrigé : 1. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto M^\top$. On a $\varphi^2 = \text{id}$ et $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ sans difficulté. Par conséquent, l'application φ est une symétrie orthogonale et il s'ensuit

$$E = \text{Ker}(\varphi - \text{id}) \oplus^\perp \text{Ker}(\varphi + \text{id})$$

Ainsi

$$E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

2. Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ réel. Pour θ réel, on a

$$R(-\theta)A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + 3\sin(\theta) & \cos(\theta) + \sin(\theta) \\ 3\cos(\theta) - \sin(\theta) & \cos(\theta) - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} R(-\theta)A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) &\iff \cos(\theta) + \sin(\theta) = 3\cos(\theta) - \sin(\theta) \\ &\iff \cos(\theta) = \sin(\theta) \iff \theta \equiv \frac{\pi}{4} [\pi] \end{aligned}$$

On choisit par exemple $\theta = \frac{\pi}{4}$ et on trouve

$$A = RS \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.(a) On rappelle que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid M^\top M = I_n, \det M = 1\}$

Les applications $\psi_1 : M \mapsto M^\top M$ et $\psi_2 : M \mapsto \det M$ sont à coordonnées polynomiales en les coefficients de la matrice et sont par conséquent continues. Ainsi, l'égalité

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \psi_1^{-1}(\{I_n\}) \cap \psi_2^{-1}(\{1\})$$

garantit la fermeture de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On a clairement $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset S(0, \sqrt{n})$ ce qui prouve que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie E et par conséquent l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact. Enfin, notons $h : \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, R \mapsto \|A - R\|$. Par définition, on a $d(A, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \inf_{R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} h$. Or, l'application h est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire inverse donc continue sur le compact $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'application h atteint son minimum ce qui prouve

$$\text{Il existe } R \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } d(A, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = d(A, R).$$

3.(b) Soit x réel et $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\varphi_M(x)^\top \varphi_M(x) = \exp(-xM)R^\top R \exp(xM) = \exp -xM \exp xM = I_n$$

et $\det \varphi_x(M) = \exp(x \operatorname{Tr} M) = \exp(0_E) = 1$

Ainsi, l'application φ_M est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Avec $\varphi_M(0)R$, on en déduit que l'application f_M admet un minimum en 0. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_M(x) = \langle \varphi_M(x) - A, \varphi_M(x) - A \rangle$$

comme φ_M est dérivable sur \mathbb{R} par dérivabilité de l'exponentielle matricielle, il s'ensuit par bilinéarité du produit scalaire que f_M est dérivable avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_M(x) = 2 \langle \varphi_M(x) - A, \varphi'_M(x) \rangle \quad \text{avec} \quad \varphi'_M(x) = RM \exp(xM)$$

Comme la fonction f_M est dérivable sur \mathbb{R} et admet un minimum en 0, on a

$$f'_M(0) = 2 \langle R - A, RM \rangle = 0$$

et comme le choix de M est quelconque dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a donc montré

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \langle R - A, RM \rangle = 0$$

La matrice R^\top est une matrice d'isométrie donc par conservation du produit scalaire, on a

$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \quad \langle R^\top(R - A), R^\top RM \rangle = \langle I_n - R^\top A, M \rangle = 0$$

autrement dit

$$I_n - R^\top A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Il s'ensuit

$$S = R^\top A = I_n - (I_n - R^\top A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Et on conclut

Il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = RS$.
--