

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Soit $(u_n)_n$ suite décroissante positive de limite nulle.
 - (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
 - (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^n u_n$.
2. On pose
$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$$
 - (a) Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
 - (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice 2 (CCINP 2025)

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence
$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$$
2. Montrer que pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 dont la loi est donnée par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k)}{e^{2^{j+k}} j! k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{X+Y})$ puis la calculer.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t)^n}$$

1. Justifier que l'intégrale définissant a_n est convergente pour n entier non nul.
2. Montrer la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ et préciser sa limite.
3. Préciser la nature et éventuellement la somme de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

Exercice 5 (Mines-Telecom 2025)

Résoudre l'équation $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 6 (Mines 2025)

Soit (G, \times) un groupe abélien fini tel que $|\text{Aut}(G)| = 3$.

1. Montrer que $\varphi : x \in G \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G puis établir

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

2. Montrer que le groupe (G, \times) admet un sous-groupe V d'ordre 4 puis déterminer $\text{Aut}(V)$.
3. Établir qu'il existe un entier r tel que $G \simeq V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ puis en déduire une absurdité.

Exercice 7 (Mines 2025)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0; +\infty[$ à valeurs réelles et de carré intégrable muni la norme $\|\cdot\|_2$. On pose

$$\forall f \in E \quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$.

Exercice 8 (Centrale 2025)

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Jensen puis en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note H l'intersection des convexes de \mathbb{C} contenant les racines de P . Montrer que l'ensemble H est convexe et compact.
3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus H$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $q \in H$ tel que $d(z, H) = d(z, q)$.

(b) Montrer qu'il existe $\psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\forall h \in H \quad \left| \arg \left(\frac{z-h}{z-q} \right) \right| \leq \psi$$

(argument dans $] -\pi; \pi [$).

Exercice 9 (X 2025)

On pose
$$\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499\,999} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Montrer qu'il y a exactement une des 16 premières décimales de α qui diffère de celle de π .

Exercice 10 (ENS 2025)

Soient n, k entiers non nuls et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$.

Montrer que la matrice M est diagonalisable si et seulement si les matrices A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.