

## Préparation à l'oral - Feuille n°4

### Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Rappeler la définition de la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $X$  puis celle de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $X$ .
2. Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  normalement convergente sur  $X$  est uniformément convergente sur  $X$ .
3. La série de fonctions  $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$  est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R > 0$  ?

### Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$  avec  $a, b$  et  $c$  réels.

La matrice  $M$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ? Dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  ?

### Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit  $N$  entier non nul,  $p \in ]0; 1[$ ,  $q = 1 - p$ . On considère  $X_1, \dots, X_N$  variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{G}(p)$ .

1. Pour  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$  et  $n$  entier non nul, déterminer  $\mathbb{P}(X_i \leq n)$  puis  $\mathbb{P}(X_i > n)$ .
2. On pose  $Y = \min(X_1, \dots, X_N)$ .
  - (a) Pour  $n$  entier non nul, calculer  $\mathbb{P}(Y > n)$ . En déduire  $\mathbb{P}(Y \leq n)$  puis  $\mathbb{P}(Y = n)$ .
  - (b) Reconnaître la loi de  $Y$  et préciser  $\mathbb{E}(Y)$ .

### Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$

1. Soient  $u, v$  des endomorphismes nilpotents non nuls de  $E$  qui commutent.  
Montrer  $\text{rg}(u \circ v) < \text{rg}(v)$
2. Soient  $u_1, \dots, u_n$  des endomorphismes nilpotents de  $E$  qui commutent deux à deux. Montrer  $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

### Exercice 5 (Mines-Telecom 2025)

On pose  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  que l'on munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On pose

$$\forall (f, x) \in E \times [0; 1] \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

Montrer que  $T \in \mathcal{L}_c(E)$  et calculer  $\|T\|_{\text{op}}$ .

## Exercice 6 (Mines 2025)

On pose  $\forall j \in \mathbb{N}^* \quad k_j = \text{Min} \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq j \right\}$

1. Montrer que la quantité  $k_j$  est bien définie pour  $j$  entier non nul.
2. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de  $(k_j)_{j \geq 1}$ .

3. Établir 
$$\frac{k_{j+1}}{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} e$$

## Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  pour  $n$  entier.

1. Montrer, par comparaison série/intégrale, que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^4}$  converge.

2. (a) Soit  $n$  entier. Établir  $\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq \frac{3n^2}{a^4}$

(b) On pose 
$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} \{ |S_m| < m^{3/4} \ln(m) \}$$

Montrer 
$$\mathbb{P}(A) = 1$$

3. Établir 
$$\frac{S_n}{n^{3/4} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{presque sûrement}$$

## Exercice 8 (X 2025)

Soient  $k, m$  et  $n$  entiers non nuls. On munit  $\mathbb{R}^m$  de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^m$  tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle \leq -\frac{1}{k}$$

Montrer 
$$n \leq k + 1$$

2. Montrer qu'il existe une famille  $(v_1, \dots, v_{k+1})$  de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^k$  tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; k + 1 \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{k}$$

## Exercice 9 (ENS 2025)

Soit  $n$  entier non nul. Un *chemin auto-évitant* de longueur  $n$  de  $\mathbb{Z}^2$  est une suite injective de points  $a_0, \dots, a_n$  de  $\mathbb{Z}^2$  telle que  $a_0 = (0, 0)$  et  $\|a_{i+1} - a_i\| = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  avec  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $c_n$  le nombre de chemins auto-évitants de longueur  $n$ .

1. Montrer 
$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad c_{m+n} \leq c_m c_n$$

2. Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $n$  assez grand, on a

$$(2 + \varepsilon)^n \leq c_n \leq (3 - \varepsilon)^n$$