

Préparation à l'oral - Feuille n°2

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f(e_i) = v$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $v \in E$.

1. Donner le rang de f .
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Corrigé : Exercice 72 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1]$ $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x}$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx$

Corrigé : Exercice 10 CCINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , de loi de probabilité donnée par $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour n entier. La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $] -1; 1 [$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X .
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $S = X_1 + X_2$. Montrer que $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ pour $t \in] -1; 1 [$:
 - (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières ;
 - (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Remarque : On admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotées 2. Soit n entier non nul. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in] -1; 1 [$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n .

Corrigé : Exercice 96 CCPINP 2025

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad u_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(nx)}$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

2. Déterminer un équivalent simple de la somme $S(x)$ pour $x \rightarrow 0$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $u_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-xn}$ et $\sum e^{-xn}$ converge en tant que série géométrique d'où la convergence simple d'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs. On a $\|u_n\|_\infty = +\infty$ pour tout n entier non nul ce qui entraîne qu'il n'y a pas convergence normale sur $]0; +\infty[$. Supposons qu'il y ait convergence uniforme sur $]0; +\infty[$. On aurait alors R_n borné sur $]0; +\infty[$ à partir d'un certain rang et donc $u_n = R_n - R_{n-1}$ également ce qui est clairement faux. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $]0; +\infty[$. Soit $a > 0$. On a

$$\|u_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = \frac{1}{\text{sh}(na)}$$

et on en déduit la convergence normale et donc uniforme sur $[a; +\infty[$ pour $a > 0$. Ainsi

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ et normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.

2. Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \frac{1}{\text{sh}(xu)}$ est continue, décroissante sur $]0; +\infty[$. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(tx)} \leq S(x) = \frac{1}{\text{sh}(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} \leq \frac{1}{\text{sh}(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(tx)}$$

Avec le changement de variable $u = e^{tx}$, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(tx)} = \int_1^{+\infty} \frac{2e^{tx}}{e^{2tx} - 1} dt = \frac{2}{x} \int_{e^x}^{+\infty} \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{x} \left[\ln \left(\left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) \right]_{e^x}^{+\infty} = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$$

Puis $\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{x} (\ln(e^x + 1) - \ln(x(1 + o(1)))) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$ et $\frac{1}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

On conclut

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

Question additionnelle : Déterminer un équivalent simples pour $x \rightarrow +\infty$.

On a pour $x > 0$

$$S(x) = \frac{1}{\text{sh}(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\text{sh}(nx)} = 2e^{-x} + o(e^{-x}) + e^{-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} \text{sh}(nx)}$$

On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad v_n(x) = \frac{1}{e^{-x} \text{sh}(nx)}$ et $w_n(x) = e^{-x} \text{sh}(nx)$

Pour n entier non nul, on a w_n dérivable sur $]0; +\infty[$ avec

$$\forall x > 0 \quad w'_n(x) = e^{-x} (-\text{sh}(nx) + n \text{ch}(nx)) \geq 0$$

On en déduit la croissance w_n et donc la décroissance de v_n . Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|v_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = \frac{1}{e^{-1} \operatorname{sh}(n)}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n \geq 2}^{+\infty} v_n$ sur $[1; +\infty[$. Enfin, on a

$$\forall n \geq 2 \quad v_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-(n-1)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème de double limite, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} \operatorname{sh}(nx)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où
$$S(x) = 2e^{-x} + o(e^{-x})$$

On conclut
$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-x}}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

On pose
$$\forall n \geq 2 \quad f(n) = \prod_{d|n, d < n} d$$

Résoudre l'équation $f(n) = n$ d'inconnue n entier avec $n \geq 2$.

Corrigé : Supposons $n = p^\alpha$ avec p premier α entier non nul. On a

$$f(p^\alpha) = \prod_{\beta=0}^{\alpha-1} p^\beta = p^{\alpha(\alpha-1)/2}$$

Si $\alpha = 1$, on a $f(p^\alpha) = 1 \neq p^\alpha$. Si $\alpha = 2$, on a $f(p^\alpha) = p < p^\alpha$. Si $\alpha = 3$, on a $f(p^\alpha) = p^\alpha$. Si $\alpha \geq 4$, on a $f(p^\alpha) > p^\alpha$. On suppose désormais $n = p^\alpha b$ avec p premier, α entier non nul et $b > 1$ avec $p \wedge b = 1$. Supposons $\alpha \geq 2$. On a $p^{\alpha-1}b$ et p^α diviseurs stricts de n d'où

$$p^{2\alpha-1}b | f(n) \quad \text{et} \quad p^{2\alpha-1}b > p^\alpha b = n$$

On en déduit $\alpha = 1$. Supposons que b possède deux facteurs premiers distincts. On note $b = q_1 q_2 r$ avec q_1 et q_2 des nombres premiers distincts et r entier non nul. On a $p q_1 r$ et $p q_2 r$ diviseurs stricts de $n = p q_1 q_2 r$ d'où $p^2 q_1 q_2 r^2 | f(n)$ et par conséquent $v_p(f(n)) \geq 2$ alors qu'on a $v_p(n) = 1$. On en déduit que b ne possède qu'un seul facteur premier et par symétrie des rôles, sa valuation est forcément égale à 1. La synthèse est immédiate. On conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad f(n) = n \iff n \in \{p^3, p \in \mathcal{P}\} \cup \{pq, (p, q) \in \mathcal{P}^2\}}$$

Exercice 6 (Mines 2025)

1. Soit A réel et f, g continues sur \mathbb{R}_+ avec g positive. On suppose

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t) dt$$

Montrer
$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right)$$

2. On considère l'équation différentielle

$$x'' + a(t)x = b(t) \tag{*}$$

avec a, b dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et b et $t \mapsto ta(t)$ intégrables sur \mathbb{R}_+ . Soit x une solution de (*).

(a) Établir

$$\forall t \geq 1 \quad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u) du + \int_1^t (t-u)b(u) du$$

(b) On pose $\forall t \geq 1 \quad y(t) = \frac{|x(t)|}{t}$

Montrer qu'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq 1 \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_1^t u|a(u)| du\right) \leq K \exp\left(\int_1^{+\infty} u|a(u)| du\right)$$

Corrigé : 1. On pose $U(x) = A + \int_0^x f(t)g(t) dt$ pour $x \geq 0$. La fonction U est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ avec $U'(x) = f(x)g(x)$ pour $x \geq 0$ d'où

$$U'(x) = f(x)g(x) \leq g(x)U(x)$$

On pose $\forall x \geq 0 \quad h(x) = U'(x) - g(x)U(x)$

et on décide de considérer cette relation comme équation différentielle en U de second membre h . Par variation de la constante, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad U(x) = \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right) \left(U(0) + \int_0^x \exp\left(-\int_0^s g(t) dt\right) \underbrace{dt h(s)}_{\leq 0} ds \right) \\ \leq \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right) U(0)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq U(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t) dt\right)}$$

2.(a) Comme l'équation différentielle est sous forme normalisée, on sait que $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, il vient

$$\forall t \geq 1 \quad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) + \int_1^t (t-u)x''(u) du$$

Or, on a $\forall u \geq 0 \quad x''(u) = b(u) - a(u)x(u)$

D'où $\boxed{\forall t \geq 1 \quad x(t) = x(1) + (t-1)x'(1) - \int_1^t (t-u)a(u)x(u) du + \int_1^t (t-u)b(u) du}$

2.(b) Le lemme de Gronwall établi à la question 1 se décline à l'identique sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Soient f, g dans $\mathcal{C}^0([1; +\infty[, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq A + \int_1^x f(t)g(t) dt$$

Alors $\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq A \exp\left(\int_1^x g(t) dt\right)$

D'après l'égalité établie à la question précédente, il vient pour $t \geq 1$

$$\frac{x(t)}{t} = \frac{x(1)}{t} + \frac{t-1}{t}x'(1) - \int_1^t \frac{t-u}{t}a(u)x(u) du + \int_1^t \frac{t-u}{t}b(u) du$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour $t \geq 1$ en observant $\frac{t-u}{t} \leq 1$ pour $u \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &\leq |x(1)| + |x'(1)| + \int_1^t |b(u)| \, du + \int_1^t y(u)u |a(u)| \, du \\ &\leq \underbrace{|x(1)| + |x'(1)| + \int_1^{+\infty} |b(u)| \, du}_{=K} + \int_1^t y(u)u |a(u)| \, du \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on conclut

$$\forall t \geq 1 \quad y(t) \leq K \exp\left(\int_1^t u |a(u)| \, du\right) \leq K \exp\left(\int_1^{+\infty} u |a(u)| \, du\right)$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

- Énoncer les théorèmes de changement de variables et d'intégration par parties pour les intégrales généralisées.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P \geq 2$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(P(t)) \, dt$ converge.
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \, dt$ n'est pas absolument convergente.

Corrigé : 1. Voir cours.

2. Un polynôme non nul possède un nombre fini de racines. On dispose donc de $a \geq 0$ tel que $P'(t) \neq 0$ pour $t \geq a$. La fonction $t \mapsto \cos(P(t))$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$. On a l'égalité formelle

$$\int_a^{+\infty} \cos(P(t)) \, dt = \int_a^{+\infty} \frac{P'(t) \cos(P(t))}{P'(t)} \, dt$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(P(t))}{P'(t)}$ et $t \mapsto P'(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; +\infty[$ et comme $\deg P' \geq 1$, on a

$$\frac{\sin(P(t))}{P'(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

et une limite finie en a par continuité. D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_a^{+\infty} \cos(P(t)) \, dt \quad \text{et} \quad - \int_a^{+\infty} \frac{P''(t)}{P'(t)^2} \sin(P(t)) \, dt$$

sont de même nature. On note $n = \deg P$ et a_n son coefficient dominant. On a

$$P''(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n n(n-1)t^{n-2} \quad \text{et} \quad P'(t)^2 \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n^2 n^2 t^{2n-2}$$

d'où

$$\frac{P''(t)}{P'(t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n-1}{na_n} \frac{1}{t^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

On en déduit la convergence de $\int_a^{+\infty} \frac{P''(t)}{P'(t)^2} \sin(P(t)) \, dt$ par comparaison et critère de Riemann et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \cos(P(t)) \, dt \text{ converge.}}$$

3. On a $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\cos(t^2)| \geq \cos(t^2)^2 = \frac{1 + \cos(2t^2)}{2}$

Supposons $\int_0^{+\infty} |\cos(t^2)| dt$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)^2 dt$ converge et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(2t^2) dt$ converge d'après ce qui précède. Par linéarité, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (1 + \cos(2t^2) - \cos(2t^2)) dt = \int_0^{+\infty} 1 dt \text{ convergente}$$

ce qui est clairement absurde. On conclut

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ n'est pas absolument convergente.

Variante : Avec le changement de variables $u = t^2$, les intégrales

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} |\cos(t^2)| dt \quad \text{et} \quad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}} du$$

sont de même nature. Pour n entier non nul, on a par relation de Chasles

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} du = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} du$$

Par monotonie, on trouve

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u \in [k\pi; (k+1)\pi] \quad \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} \geq \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{(k+1)\pi}}$$

d'où
$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} du \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)| du = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C}{\sqrt{(k+1)}}$$

avec $C > 0$ par π -périodicité de $u \mapsto |\cos(u)|$. La série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ diverge par critère de Riemann d'où

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} du \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

On retrouve le résultat précédent.

Exercice 8 (ENS 2025)

Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} . On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Bourdaud si $\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - m_{i,i})$.

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable sur \mathbb{K} à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable sur \mathbb{K} .
2. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.
3. On dit qu'une matrice réelle A est normale si $A^T A = A A^T$. Déterminer les matrices réelles normales de Bourdaud.

Corrigé : 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si la matrice A est semblable à une matrice B de Bourdaud, alors on a

$$\chi_A = \chi_B = \prod_{i=1}^n (X - b_{i,i})$$

qui est scindé sur $\mathbb{K}[X]$. On en déduit que la matrice A est trigonalisable sur \mathbb{K} . Si la matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T , on a

$$\chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_{i,i})$$

La matrice T est donc de Bourdaud et on conclut

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de Bourdaud si et seulement si elle est trigonalisable

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Bourdaud. On en déduit $\text{Sp}(A) = \{a_{i,i}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ et d'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PDP^\top \quad \text{avec} \quad D = \text{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$$

d'où
$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \text{Tr}(A^\top A) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$$

Comme les $a_{i,j}^2$ sont des réels positifs, on en déduit $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ ce qui prouve que la matrice A est diagonale. La réciproque est immédiate. On conclut

Une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.

3. Soit M une matrice réelle normale. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker } M &\iff \|MX\|^2 = 0 \iff X^\top M^\top M X = 0 \iff X^\top M M^\top X = 0 \\ &\iff \|M^\top X\|^2 = 0 \iff X \in \text{Ker } M^\top \end{aligned}$$

autrement dit $\text{Ker } M = \text{Ker } M^\top$. Soit A une matrice réelle normale. En appliquant la propriété qui précède à $(A - \lambda I_n)^\alpha$ avec λ réel et α entier qui est clairement normale, on en déduit

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha = \text{Ker}(A^\top - \lambda I_n)^\alpha$$

et avec $\chi_A = \chi_{A^\top}$, on en déduit que les matrices A et A^\top ont même sev caractéristiques. Quitte à travailler dans \mathbb{C} , on peut donc trigonaliser les matrices A et A^\top dans une même base obtenue par concaténation des bases de leurs sev caractéristiques et les termes diagonaux sont identiques. Si la matrice A est de Bourdaud, son spectre est $\{a_{i,i}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ et par conséquent, on en déduit après trigonalisation simultanée

$$\text{Tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$$

Par ailleurs, on a

$$\text{Tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$$

et il en résulte que $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. La réciproque est immédiate et on conclut

Une matrice réelle normale est de Bourdaud si et seulement si elle est diagonale.