

IMT - BEOS 8901**Exercice 1**

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Calculer $I(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos(x) \cos(\theta)} dx$.

Exercice 2

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\exists u \in \mathcal{L}(E), \ker u = \text{Im} u \Leftrightarrow n \text{ est pair}$$

IMT - BEOS 8900**Exercice 1**

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Soit $\varphi : u \mapsto v$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Montrer que φ est un automorphisme de l'ensemble des suites réelles. Que peut-on dire de son spectre ?
2. Déterminer les valeurs propres de φ .

Exercice 2

Etudier la convergence simple, puis uniforme sur $[0, \pi/2]$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n^2 \cos(x) \sin^n(x).$$

Mines - BEOS 8924**Exercice 1**

Soit $\alpha > 0$ un réel. Soit b une fonction continue par morceaux de période 1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbb{1}_{[0, \alpha]}(x) dx.$$

Montrer que

$$I_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \int_0^1 b(y) dy.$$

Exercice 2

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité.
2. Montrer que pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\|MX\| \leq \text{Tr}(MM^T) \|X\|^2.$$

CCINP - BEOS 8894

Un homme peint un mur en étant placé sur un échafaudage. Les passants passent sous son échafaudage et ont chacun une probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire toucher par une goutte de peinture.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées en une journée et Y celui du nombre de personnes qui ne sont pas touchées. On suppose que n personnes passent dans la journée.

1. Donner les lois de X et Y , puis définir si X et Y sont indépendantes.
2. On suppose maintenant que N personnes passent dans la journée et que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Donner les lois de X et de Y , puis l'espérance et la variance de X .
3. Montrer que X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\text{Cov}(X, N)$. Les variables X et N sont-elles indépendantes?

CCINP - BEOS 8919

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que A soit diagonalisable.
Dans l'hypothèse où A est diagonalisable, la diagonaliser.