

**Exercice 1.** [CCP 2022]

Soit  $A \subset \mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. Démontrer l'implication :

(la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ )

↓

(la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ )

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

Prouver que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; +\infty[$ ? Justifier.

**Solution :**

1. On suppose que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ .

On en déduit que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ .

On pose alors,  $\forall x \in A, S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ .

$\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , c'est-à-dire  $(S_n)$  converge uniformément vers  $S$  sur  $A$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$ , avec  $\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)|$ .

On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A, |f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A, |f_n(x)| \leq \|S_n - S\|_\infty + \|S_{n-1} - S\|_\infty$  (majoration indépendante de  $x$ ).

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|S_n - S\|_\infty + \|S_{n-1} - S\|_\infty) = 0$ .

Donc  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ .

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

Soit  $x \in [0; +\infty[$

Si  $x = 0$  :

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0$  donc  $\sum f_n(0)$  converge.

Si  $x \neq 0$  :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f_n(x) = 0$ , donc au voisinage de  $+\infty$ ,  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge absolument donc, par critère de domination,  $\sum f_n(x)$  converge absolument.

On en déduit que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ , donc  $f_n$  est bornée sur  $[0; +\infty[$ .

Comme  $f_0$  est bornée ( $f_0 = 0$ ), on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est bornée sur  $[0; +\infty[$ .

De plus, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$  vers la fonction  $f$  définie par :

$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = 0$

En effet :

Soit  $x \in [0; +\infty[$ .

si  $x = 0$  alors  $f_n(0) = 0$  et si  $x \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

si  $x \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  par croissances comparées.

De plus,  $f_n$  est bornée sur  $[0; +\infty[$  donc  $f_n - f = f_n$  est bornée sur  $[0; +\infty[$ . Par ailleurs, on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1}$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t) - f(t)|$ ; donc  $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t) - f(t)| \geq e^{-1}$ . Ainsi,  $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On en déduit que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

Donc, d'après 1.,  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 2.** [CCP 2022]

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note  $D$  l'ensemble des  $x$  où cette série converge et  $S(x)$  la somme de cette série pour  $x \in D$ .

2. (a) La fonction  $S$  est-elle continue sur  $D$ ?  
 (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur  $D$ .  
 (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur  $[0, 1]$ .

**Solution :**

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence  $R = 1$ .

En  $x = 1$ , il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.

En  $x = -1$ , la série diverge (série harmonique).

On a donc  $D = ]-1, 1[$ .

2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1,  $S$  est continue sur  $] -1, 1[$ .

En  $x = 1$ , il s'agit de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ , dont la convergence est assurée par application immédiate du critère des séries alternées.

Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de  $S$  en 1, et donc finalement sur  $D$  entier.

(b)  $\forall x \in D, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$ .

$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in ]-1, 1[} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  ne converge pas normalement sur  $D$ .

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  ne converge pas uniformément sur  $D$  non plus car, sinon, on pourrait employer le

théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , ce qui est absurde.

(c) On étudie la convergence uniforme sur  $[0, 1]$ .

$\forall x \in [0, 1]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste  $R_n$ .

On a :

$\forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ . (majoration indépendante de  $x$ )

Donc  $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ .

Donc,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Bilan final :**

En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur tout segment de  $] -1, 1[$  et converge uniformément sur tout segment de  $] -1, 1[$ .

**Exercice 3.** [Centrale MP 2024]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soient  $G$  un sous groupe fini de  $GL(E)$ ,  $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$  et  $V^G = \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$ .

1. Montrer que si  $h \in G$ ,  $g \in G \mapsto h \circ g \in G$  est une bijection de  $G$  sur lui-même, puis que  $p$  est un projecteur.
2. Montrer que  $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$ .
3. Montrer que tout sous-espace  $V$  stable par tous les éléments de  $G$  admet un supplémentaire stable pour tous les éléments de  $G$ .

On pourra partir d'un projecteur  $q$  de  $E$  sur  $V$  et considérer  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$ .

**Solution :**

1. Si  $\varphi_h : g \in G \mapsto h \circ g \in G$ , alors  $\varphi_h \circ \varphi_{h^{-1}} = \varphi_{h^{-1}} \circ \varphi_h = \text{id}_G$ , donc  $\varphi_h$  est une bijection de  $G$  sur lui-même. On calcule alors :  $p^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} g \circ h = \sum_{h \in G} \underbrace{\sum_{g \in G} gh}_{= \sum_{g' = gh} g' \in G} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} p = p$

donc  $p$  est un projecteur.

2. On va montrer que  $\text{Im}(p) = V^G$ . Déjà, pour tout  $x \in V^G$ , on calcule :  $p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x$ , donc  $V^G \subset \text{Im}(p)$ . Soit  $x \in \text{Im}(p)$ , alors pour tout  $h \in G$ ,  $h(x) = h(p(x)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \circ g(x) \underset{g' = h \circ g}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g'(x) = p(x) = x$ , donc  $x \in V^G$ . Finalement  $\text{Im}(p) \subset V^G$  puis  $\text{Im}(p) = V^G$ . Enfin :  $\dim(V^G) = \text{rg}(p) = \text{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$ .

3. Soit  $G$  un sous-espace stable par tous les éléments de  $G$ . Suivons l'indication et étudions  $q$  un projecteur sur  $V$  et  $r = \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$ . On calcule pour tout  $x \in E$  :

$$\begin{aligned} r^2(x) &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} g \circ \underbrace{q \circ g^{-1} \circ h \circ q \circ h^{-1}(x)}_{= g^{-1} \circ h \circ q \circ h^{-1}(x) \text{ car } g^{-1} \circ h \circ q \circ h^{-1}(x) \in g^{-1} \circ h(V) \subset V} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} g \circ g^{-1} \circ h \circ q \circ h^{-1}(x) \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} h \circ q \circ h^{-1}(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r(x) = r(x) \end{aligned}$$

donc  $r^2 = r$ , donc  $r$  est un projecteur, et le calcul précédent montre que  $\text{Im}(r) \subset V$ .

Par ailleurs,

$$\dim(\text{Im}(r)) = \text{rg}(r) = \text{tr}(r) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\text{tr}(g \circ q \circ g^{-1})}_{= \text{tr}(q)} = \text{tr}(q) = \text{rg}(q) = \dim(V)$$

donc  $\text{Im}(r) = V$ . Enfin, pour tout  $h \in G$  on a :

$$h \circ r \circ h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \circ g \circ q \circ g^{-1} \circ h^{-1} \underset{g' = hg}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' \circ q \circ g'^{-1} = r$$

donc  $h \circ r = r \circ h$ . En particulier  $\ker(r)$ , qui est un supplémentaire de  $V = \text{Im}(r)$ , est stable par tous les éléments de  $G$ .

**Exercice 4.** [Mines MP/MPI 2021]

1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  est nilpotente si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(M^k) = 0$
2. Soient  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ . On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $M \in G$ ,  $M^N = I_n$  et  $(M_1, \dots, M_p) \in G^p$  une base de  $\text{Vect}(G)$ .  
Montrer que l'application  $A \in G \mapsto (\text{tr}(AM_1), \dots, \text{tr}(AM_p))$  est injective.  
Qu'en déduit-on sur  $G$ ?

**Solution :**

(\* corrigé peu détaillé \*)

1. classique (via système de Vandermonde en supposant par l'absurde que 0 n'est pas la seule vp).
2. Soient  $A, B \in G$  telles que  $\phi(A) = \phi(B)$ , alors par linéarité de la trace et du produit matriciel, pour tout  $M$  dans  $\text{Vect}(G)$ ,  $\text{tr}((A - B)M) = 0$  puis en posant  $M' = B^{-1}M \in G$ , pour tout  $M' \in \text{Vect}(G)$ ,  $\text{tr}((AB^{-1} - I_n)M') = 0$ .

En particulier, pour  $M'$  une puissance de  $AB^{-1} - I_n$ , si bien que  $AB^{-1} - I_n$  est nilpotente d'après la question précédente. Mais  $AB^{-1} \in G$  est diagonalisable (annulée par  $X^N$ ) tout comme  $AB^{-1} - I_n$ , donc  $AB^{-1} - I_n = 0$  donc  $A = B$ .

Il reste à démontrer que l'image de  $\phi$  est finie : c'est un  $p$ -uplet d'éléments de  $\mathbb{C}$  qui sont des traces d'éléments de  $G$ , et ces traces sont des sommes de racines  $N$ -ième de l'unité, elles sont en nombre fini.

Ccl :  $G$  est fini.

**Exercice 5.** [Mines MP/MPI 2021]

Soient  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des nombres complexes deux à deux distincts,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  des éléments de  $\mathbb{N}^*$ ,  $n = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonalisable telle que  $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ,  $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$ .

1. Montrer que  $C(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de dimension  $\sum_{i=1}^r \alpha_i^2$ .
2. Soit  $C'(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \forall M \in C(A), XM = MX\}$ . Montrer que  $C'(A) = \mathbb{C}[A]$ .

**Solution :**

(\* corrigé peu détaillé \*)

1. On diagonalise et on exploite la stabilité des sous-espaces propres pour des endomorphismes qui commutent.
2.  $\mathbb{C}[A] \subset C'(A)$ . On travaille par blocs, en regardant le cas  $r = 1$   $C'(A)$  est le centre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il est de dimension 1. Donc  $C'(A)$  est de dimension  $r$ , comme  $\mathbb{C}[A]$  (preuve avec utilisation du polynôme minimal), donc  $\mathbb{C}[A] = C'(A)$ .

**Exercice 6.** [IMT MP 2018]

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable.
2. Démontrer que 0 est valeur propre de  $A$  et donner une base du sous-espace propre correspondant.
3. Trouver  $\alpha$  tel que  $A^3 = \alpha A$ . En déduire le spectre de  $A$  et les sous-espaces propres de  $A$ .
4. Calculer  $\text{Tr}(A^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

**Solution :**

1.  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable.
2.  $\text{rg}(A) = 2 < n$  (on le suppose) donc non inversible, 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension  $n - 2$ .  
 $\mathcal{B} = (e_i - e_n)_{2 \leq i \leq n-1}$  où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , est une famille libre (à vérifier) de  $\text{Ker}(A)$  de cardinal  $n - 2 = \dim \text{Ker } A$ , donc c'en est une base.
3. On calcule  $A^3 = (n-1)A$  donc  $X^3 - (n-1)X = X(X - \sqrt{n-1})(X + \sqrt{n-1})$  est annulateur de  $A$ . Le spectre de  $A$  est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme. On sait déjà que 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité  $n - 2$ . Comme  $A$  est diagonalisable et n'est pas la matrice nulle, soit l'un des deux scalaires  $\sqrt{n-1}$  ou  $-\sqrt{n-1}$  est valeur propre de multiplicité 2, soit les deux sont valeurs propres de multiplicité 1. Comme la trace de  $A$  est nulle et est la somme des valeurs propres avec multiplicité,  $\sqrt{n-1}$  et  $-\sqrt{n-1}$  sont bien valeurs propres de multiplicité 1.

$$\text{On observe alors } \text{Ker}(A - \sqrt{n-1}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \text{Ker}(A + \sqrt{n-1}) =$$

$$\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. Si  $k = 0$ ,  $A^0 = I_n$ . On suppose désormais  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
 $A$  étant diagonalisable,  $A^k$  est aussi diagonalisable et ses valeurs propres sont 0 avec multiplicité  $n - 2$ ,  $(n-1)^{\frac{k}{2}}$  avec multiplicité 1 et  $(-1)^k (n-1)^{\frac{k}{2}}$  avec multiplicité 1 (quand  $k$  est pair ces deux cas se regroupent).

$$\text{On calcule alors } \text{Tr}(A^k) = (n-1)^{\frac{k}{2}} + (-1)^k (n-1)^{\frac{k}{2}} = \begin{cases} 2(n-1)^\ell & \text{si } k = 2\ell \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 7.** [Centrale MP 2021]

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que  $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Soit  $\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$ .

1. Montrer que  $\phi_X$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. On suppose (dans cette question seulement) que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Exprimer  $\phi_X(t)$ .
3. On suppose que  $X$  possède un moment d'ordre 2. Montrer que  $\phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Exprimer  $E(X)$  et  $V(X)$  à l'aide de  $\phi_X$ .

**Solution :**

1. On calcule :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} |e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1 < +\infty$$

ce qui montre d'une part la convergence absolue de la série, puis la convergence de la série, et donc la bonne définition de  $\phi_X$  sur  $\mathbb{R}$ .

Mais la majoration du module du terme général étant indépendante de  $t$ , il y a aussi convergence normale de la série de fonctions de la variable  $t$  sur  $\mathbb{R}$ , donc continuité de  $\phi_X$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : t \mapsto e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$  est continue (et même  $\mathcal{C}^\infty$ ) sur  $\mathbb{R}$ .

2. On calcule en reconnaissant une série exponentielle :

$$\phi_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

3.  $X$  admet un moment d'ordre 2, donc aussi un moment d'ordre 1. On calcule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f'_n(t)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) = E(|X|) < +\infty$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f''_n(t)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^2| \mathbb{P}(X = x_n) = E(X^2) < +\infty$$

ce qui montre comme à la question 1 que les séries de fonctions de termes généraux  $f_n$  et  $f'_n$  convergent simplement sur  $\mathbb{R}$  et la série de fonction de terme général  $f''_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème de dérivation terme à terme s'applique,  $\phi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X''(t) = - \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$$

En particulier  $iE(X) = \phi'_X(0)$  donc  $E(X) = -i\phi'_X(0)$  et  $-E(X^2) = \phi''_X(0)$  donc  $V(X) = \phi'_X(0)^2 - \phi_X''(0)$ .

**Exercice 8.** [CCINP MP 2021]

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :

$$\forall f \in E, \quad N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

1. (a) Démontrer que  $N_\infty$  et  $N_1$  sont deux normes sur  $E$ .  
(b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .  
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .
  2. Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.
-

**Exercice 9.** [Centrale MP 2021]

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées.

Pour  $u \in E$ , on note  $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$  et  $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ .

1. Montrer que  $N_\infty$  et  $N$  sont des normes sur  $E$ . Sont-elles équivalentes?

On munit désormais  $E$  de la norme  $N_\infty$ .

2. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est d'intérieur vide.  
Quelle est son adhérence?
3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble des suites à valeurs strictement positives.

**Solution :**

(\* solution peu détaillée \*)

1. Pour  $N_\infty$  c'est le cours. Pour l'autre, on justifie la convergence de la série par majoration par le terme général d'une série géométrique de raison  $1/2$ . Homogénéité, inégalité triangulaire et séparation ne posent pas problème.
2. Notons  $A$  l'ensemble des suites nulles APCR. Soit  $u \in A$  et  $\varepsilon > 0$ . On note  $N$  un rang à partir duquel la suite  $u$  s'annule et on considère  $v$  la suite définie par  $v_n = u_n$  si  $n \leq N$  et  $v_n = \varepsilon/2$  sinon. Alors  $v \in \bar{A}$  et  $N_\infty(u - v) < \varepsilon$ . Autrement dit pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $B_\infty(u, \varepsilon) \not\subset A$  :  $A$  est d'intérieur vide.  
Soit  $v$  une suite de limite nulle. Soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|v_n| < \varepsilon$ . La suite  $u$  égale à  $v$  jusqu'au rang  $N$  et nulle après est un élément de  $A$  tel que  $N_\infty(u - v) \leq \varepsilon$  : l'ensemble  $B$  des suites de limite nulle est dans  $\bar{A}$ .  
Or  $B$  est fermé (vérification rapide il y a convergence uniforme) donc  $\bar{A} = B$ .
3. Adhérence : ensemble des suites à termes  $\geq 0$ . Intérieur : ensemble des suites à termes  $\geq 0$  tel que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n > 0$ .

**Exercice 10.** [CCP 2022]

Soit l'équation différentielle :  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .

Déterminer la somme des séries entières obtenues.

2. Est-ce que toutes les solutions de  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0; 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $] -1, 1[$ ?

**Solution :**

1. Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $S$ .

Pour tout  $x \in ] -R, R[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

$$\text{Donc } x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1}) x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction  $S$  est solution sur  $] -R, R[$  de l'équation étudiée si, et seulement si,  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$ .

C'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1) a_n$ .

Ce qui revient à :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$ .

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum n x^n$  étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2} \text{ définies sur } ] -1, 1[, \text{ avec } a_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Notons (E) l'équation  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

Prouvons que les solutions de (E) sur  $]0; 1[$  ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.

Si toutes les solutions de (E) sur  $]0; 1[$  étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur  $]0; 1[$  serait égal à la droite vectorielle

$$\text{Vect}(f) \text{ où } f \text{ est la fonction définie par } \forall x \in ]0; 1[, f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Or, d'après le cours, comme les fonctions  $x \mapsto x(x-1)$ ,  $x \mapsto 3x$  et  $x \mapsto 1$  sont continues sur  $]0; 1[$  et que la fonction  $x \mapsto x(x-1)$  ne s'annule pas sur  $]0; 1[$ , l'ensemble des solutions de (E) sur  $]0; 1[$  est un plan vectoriel.

D'où l'absurdité.

**Exercice 11.** [IMT MP/MPI 2024]

Montrer que  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Solution :**

Il y a convergence simple de la série de fonctions par théorème des séries alternées (ne pas oublié de vérifier que pour  $x$  fixé,  $(\ln(1 + \frac{x}{k}))$  décroît).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k : x \mapsto (-1)^k \ln(1 + \frac{x}{k})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f'_k : x \mapsto (-1)^k \frac{1}{k+x}$ . La série  $\sum (-1)^k \frac{1}{k+x}$  relève elle aussi du théorème des séries alternées, et d'après les résultats sur la majoration du reste :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n| \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

donc le reste tend uniformément vers 0, la série des dérivées converge uniformément.

On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Exercice 12. [Centrale MP 2021]

1. Montrer qu'il existe une unique suite  $(H_n)$  de polynômes tels que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \exp(xt - t^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n$$

2. Montrer que  $H'_n = H_{n-1}$  et  $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$ .  
 3. Montrer que les  $H_n$  forment une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$  pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2} dx.$$

**Solution :**

1. Soient  $x, t \in \mathbb{R}$ , par développement en série entière il vient :

$$\begin{aligned} e^{xt - \frac{t^2}{2}} &= e^{xt} e^{-t^2/2} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k t^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\stackrel{\text{prod. Cauchy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k} (-1)^{n-k}}{(2k)! 2^{n-k} (n-k)!} \right) t^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1} (-1)^{n-k}}{(2k+1)! 2^{n-k} (n-k)!} \right) t^{2n+1} \end{aligned}$$

ce qui donne l'existence en posant

$$\begin{cases} H_n = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{(2k)! 2^{m-k} (m-k)!} X^{2k} & \text{si } n = 2m \text{ est pair} \\ H_n = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m-k}}{(2k)! 2^{m-k} (m-k)!} X^{2k+1} & \text{si } n = 2m+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour l'unicité, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient l'unicité pour tout  $n \in \mathbb{N}$  des réels  $H_n(x)$  par unicité du développement en série entière, puis l'unicité des polynômes  $H_n$  par propriété de  $\mathbb{R}[X]$  (deux polynômes égaux en une infinité de réels sont égaux).

2. On obtient la première relation en dérivant les expressions obtenues à la question précédente.

On obtient la deuxième en dérivant  $t \mapsto e^{xt - t^2/2}$  et la série entière (possible puisque son rayon de convergence est infini) et en invoquant l'unicité du DSE.

3. Une intégration par parties (en dérivant  $x \mapsto H_n(x)e^{-x^2/2}$  et en primitivant  $x \mapsto H_m(x)$  en  $x \mapsto H_{m+1}(x)$ ) donne (le crochet généralisé converge par croissances comparées) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, (H_n | H_m) = (n+1)(H_{n+1} | H_{m+1})$$

En évaluant  $x \mapsto e^{xt - t^2/2}$  et sa dérivée en 0 on obtient  $H_0 = 1$  et  $H_1 = X$ . On peut alors poser  $H_{-1} = 0$  et observer que cette convention permet d'étendre les relations de la question 2 à  $n \in \mathbb{N}$ .

Puis obtenir :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (H_n | H_m) = (n+1)(H_{n+1} | H_{m+1}) \stackrel{\text{symétrie}}{=} (m+1)(H_{n+1} | H_{m+1})$$

si bien que si  $n \neq m$ ,  $(H_{n+1} | H_{m+1}) = 0$  puis  $(H_n | H_m) = 0$ , et si  $n = m$ ,  $(H_n | H_n) > 0$  par positivité stricte de l'intégration (argument de toute façon nécessaire pour justifier que l'on dispose d'un produit scalaire).

---

*On a ainsi démontré que  $\mathcal{B} = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale pour le produit scalaire. En particulier c'est une famille libre.*

*Enfin, une récurrence (immédiate) montre que  $\text{Vect}(H_k)_{0 \leq k \leq n} = \mathbb{R}_n[X]$ , si bien que tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  est combinaison linéaire de polynômes de la famille  $\mathcal{B}$  (il appartient à  $\mathbb{R}_d[X]$  où  $d$  est son degré) :  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $\mathbb{R}[X]$ .*

*Conclusion :  $\mathcal{B}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$ .*

---