Exercice 1 (CCINP 2023)

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D le domaine de convergence et S la somme définie sur D. L'application S est-elle continu sur D ?
2. Établir la convergence normale de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$ sur $[\,-1\,;1\,]$.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{S}(x)$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$

Pour $|x| > 1$, on a
$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$
d'où la divergence grossière de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$. Pour $|x| < 1$, on a
$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}(|x|^n)$$
d'où la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ par comparaison. Si $x = 1$, on a
$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$
et d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(1)$ diverge. Puis, on peut observer que la fonction sin est croissante sur $[\,0\,;1\,] \subset \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$. Par conséquent, la suite $\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, on en déduit la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(-1)$ et on conclut
$$\boxed{\text{Le domaine de convergence est } \mathrm{D} = [\,-1\,;1\,[.}$$
Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ est égal à 1. On en déduit que la fonction somme est continue sur $]\,-1\,;1\,[$. Par ailleurs, il vient par contrôle du reste de série alternée
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-1\,;0\,] \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) |x|^{n+1} \leqslant \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
d'où
$$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[\,-1\,;0\,]$ et on conclut
$$\boxed{\text{La somme S est continue sur D.}}$$
2. On pose
$$\forall (n,x) \in [\![\,2\,;+\infty\,]\!] \times [\,-1\,;1\,] \qquad v_n(x) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$$
La fonction sin est 1-lipschitzienne et il vient pour $n \geqslant 2$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$

$$|v_n(x)| \leqslant \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

et après simplification avec l'expression conjuguée, on obtient

$$\|v_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Par critère de Riemann, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} v_n \text{ converge normalement sur } [-1\,;1].}$$

3. Soit $x \in [-1\,;1[$. Il vient après changement d'indice et linéarité du symbole somme car convergence

$$\begin{aligned}(1-x)\mathrm{S}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n \\ &= \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x)\end{aligned}$$

Or la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1\,;1]$ et sa somme est donc continue sur cet intervalle. Ainsi

$$(1-x)\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(1) = \sin 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right)$$

et après téléscopage, on conclut

$$\boxed{(1-x)\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0}$$

Exercice 2 (Centrale 2022)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$ et de la norme euclidienne associée. On pose $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(\mathrm{M}) = \big(\operatorname{Tr}(\mathrm{M}) \quad \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^2) \quad \ldots \quad \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^n)\big)$$

1. (a) Établir $\qquad \forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E} \qquad |\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \leqslant \alpha \|\mathrm{A}\|$$

2. Montrer que f est différentiable et déterminer $\mathrm{d}f(\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$.

3. (a) Montrer $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \operatorname{rg} \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}$

   (b) En déduire que l'ensemble des matrices de E dont le polynôme minimal est de degré n est un ouvert de E.

Corrigé : 1.(a) L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Il en résulte que $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sur E. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$$

Ainsi
$$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right] = \left(\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n} b_{k,j}^2\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})} \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$$

1.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| = |\langle \mathrm{I}_n, \mathrm{A} \rangle| \leqslant \|\mathrm{I}_n\|\|\mathrm{A}\|$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{A} \qquad |\operatorname{Tr}(\mathrm{A})| \leqslant \sqrt{n}\|\mathrm{A}\|}$$

2. Notons $\varphi_k : \mathrm{M} \to \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^k)$ pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. L'application φ_k est polynomiale en les coefficients de la matrice d'où $\varphi_k \in \mathscr{C}^1(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Pour $(\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a

$$(\mathrm{M} + \mathrm{H})^k = \mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1} + \mathrm{R}$$

avec R une somme de produits qui contient au moins deux occurrences de H. Avec l'inégalité établie à la question 1.(b), il en résulte que $|\operatorname{Tr}(\mathrm{R})| = \mathrm{o}(\|\mathrm{H}\|)$ et on en déduit

$$\varphi_k(\mathrm{M} + \mathrm{H}) = \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^k + \mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H} + \mathrm{M}^{k-2}\mathrm{HM} + \ldots + \mathrm{HM}^{k-1}) + \mathrm{o}(\mathrm{H})$$

d'où
$$\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}(\varphi_k)(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = k \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{H})$$

Par suite

$$\boxed{\forall (\mathrm{M}, \mathrm{H}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{H} = \big(\operatorname{Tr}(\mathrm{H}) \quad 2\operatorname{Tr}(\mathrm{MH}) \quad \ldots \quad n \operatorname{Tr}(\mathrm{M}^{n-1}\mathrm{H})\big)}$$

3.(a) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) &\iff \forall k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k\mathrm{H}) = 0\\
&\iff \forall k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!] \qquad \left\langle \left(\mathrm{M}^\top\right)^k, \mathrm{H}\right\rangle = 0\\
\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) &\iff \mathrm{H} \in \mathrm{Vect}\ \left(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}^\top, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{n-1}\right)^\perp
\end{aligned}$$

On note $d = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$. On a

$$\mathbb{R}[\mathrm{M}^\top] = \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{M}^\top] \subset \mathbb{R}[\mathrm{M}^\top]$$

ce qui prouve que les inclusions sont des égalités et $(\mathrm{I}_n, \ldots, \left(\mathrm{M}^\top\right)^{d-1})$ est libre. Ainsi, on a

$$\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) \iff \mathrm{H} \in \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp$$

d'où $\qquad \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}]^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathbb{R}_{d-1}[\mathrm{M}] = \dim \mathrm{E} - \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$

et d'après le théorème du rang $\qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}^\top}$

Enfin, on a $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0$ et en transposant cette égalité, on trouve $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}^\top) = 0$ d'où $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ divise π_{M} et de même π_{M} divise $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ par symétrie des rôles entre M et $\mathrm{M}^\top$. Les polynômes minimaux π_{M} et $\pi_{\mathrm{M}^\top}$ sont associés, unitaires d'où $\pi_{\mathrm{M}} = \pi_{\mathrm{M}^\top}$ et on conclut

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \deg \pi_{\mathrm{M}}}$$

3.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\deg \pi_{\mathrm{A}} = n$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{rg}\ \mathrm{d}f(\mathrm{A}) = n$. Notant $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ extraite de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{A})$. Soit I la plage d'indices d'extraction des colonnes. On considère $\Phi : \mathrm{M} \to \det\left(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}\mathrm{d}f(\mathrm{M})\right)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times [\![\, 1\,;\, n\,]\!]}$. L'ensemble $\mathrm{U} = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue avec $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$ et tout élément de U est de rang supérieur ou égal à n et donc égal à n. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dont le polynôme minimal est de degré } n \text{ est un ouvert.}}$$

Exercice 3 (Centrale 2024)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire X notée $\mathrm{F_X}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F_X}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$$

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Montrer

$$\text{la fonction } \mathrm{F_X} \text{ croît et } \mathrm{F_X}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Soit E une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et soient X et $(\mathrm{X}_n)_n$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

2. Montrer
$$\sum_{x \in \mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

3. Montrer que la suite $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n})_n$ converge uniformément vers $\mathrm{F_X}$.

Corrigé : 1. Soit $x \leqslant y$. On a $\{\mathrm{X} \leqslant x\} \subset \{\mathrm{X} \leqslant y\}$ d'où la croissance de $\mathrm{F_X}$ par croissance de $\mathbb{P}$. La fonction $\mathrm{F_X}$ est croissante bornée donc admet une limite finie en $+\infty$ par limite monotone. Ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F_X}(x) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{F_X}(n)$$

La famille $(\{\mathrm{X} \leqslant n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion d'où, par continuité croissante,

$$\mathrm{F_X}(n) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{X} \leqslant n\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathbb{R}) = 1$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{F_X} \text{ croît et } \mathrm{F_X}(t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$$

2. On note $\mathrm{E} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et on pose

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad p_{n,k} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x_k) \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Par propriété des sommes de termes positifs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{x \in \mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k|$$

On observe pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$

$$|p_{n,k} - p_k| = p_{n,k} + p_k - 2u_k(n) \quad \text{avec} \quad u_k(n) = \min(p_{n,k}, p_k)$$

Chaque terme est un terme de série convergence et il vient par linéarité du symbole somme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{n,k} - p_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n,k} + \sum_{k=0}^{+\infty} p_k - 2\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$$

On a
$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad 0 \leqslant u_k(n) \leqslant p_k$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum u_k$. Comme on a $u_k(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient par double limite

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$$

On conclut $$\boxed{\sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. Soit $y \in \mathrm{E}$. Par linéarité du symbole somme et inégalité triangulaire pour des familles sommables, il vient

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(y) - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(y)| &= \left| \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \right| \\
&= \left| \sum_{x\in\mathrm{E},\, x\leqslant y} (\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)) \right| \leqslant \sum_{x\in\mathrm{E}, x\leqslant y} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)|
\end{aligned}$$

d'où $$\|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n} - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}\|_\infty \leqslant \sum_{x\in\mathrm{E}} |\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = x) - \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)|$$

Ainsi $$\boxed{\|\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n} - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 4 (Mines 2024)

Soit $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul. On note

$$r^+(\mathrm{P}) = \operatorname{Card} \mathrm{P}^{-1}(\{0\}) \cap \left]\,0\,;+\infty\,\right[\quad \text{et} \quad \mathrm{N}(\mathrm{P}) = \operatorname{Card}\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

1. Que dire de P si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 1$? $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 2$?
2. On suppose P non constant. Montrer
$$r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}') + 1$$
3. On suppose $\mathrm{P}(0) = 0$. Montrer $\quad r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}')$
4. Montrer $$r^+(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{P}) - 1$$
5. Soit n entier, des réels $0 < x_1 < \ldots < x_n$ et des entiers $0 \leqslant p_1 < \ldots < p_n$. Montrer
$$\det \left(x_i^{p_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0$$

Corrigé : 1. Si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 1$, on a $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^n$ avec $\alpha \neq 0$ et si $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 2$, on a $\mathrm{P} = \alpha \mathrm{X}^n + \beta \mathrm{X}^p$ avec $n > p$ et α, β non nuls d'où

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{N}(\mathrm{P}) = 1, \text{ alors } r^+(\mathrm{P}) = 0 \text{ et si } \mathrm{N}(\mathrm{P}) = 2, \text{ alors } r^+(\mathrm{P}) = 1 \text{ si } \alpha\beta < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

2. On note $r = r^+(\mathrm{P})$ et $x_1 < \ldots < x_r$ les racines de P dans $\left]\,0\,;+\infty\,\right[$. D'après le théorème de Rolle appliqué à la fonction $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, il existe $y_i \in \left]\,x_i\,;x_{i+1}\,\right[$ tel que $\mathrm{P}'(y_i) = 0$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,r-1\,]\!]$. Ainsi, on a

$$0 < x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{r-1} < y_{r-1} < y_r$$

On en déduit $r^+(\mathrm{P}') \geqslant r - 1$, autrement dit

$$\boxed{r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}') + 1}$$

3. On note $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{r-1}$ les racines de P dans $\left[\,0\,;+\infty\,\right[$. Toujours d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in \left]\,x_{i-1}\,;x_i\,\right[$ pour tout $i \in [\![\,1\,;\,r-1\,]\!]$. Ainsi, on a

$$0 = x_0 < y_1 < x_1 < \ldots < y_{r-1} < x_{r-1}$$

On en déduit $r^+(\mathrm{P}') \geqslant r - 1$ et on remarque $r - 1 = r^+(\mathrm{P})$ d'où

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P}(0) = 0, \text{ alors } r^+(\mathrm{P}) \leqslant r^+(\mathrm{P}')}$$

4. On procède par récurrence sur $\mathrm{N}(\mathrm{P})$. L'inégalité est satisfaite pour $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = 1$. On la suppose vraie pour tout polynôme Q jusqu'à un rang $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) = p - 1$ entier non nul fixé. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{N}(\mathrm{P}) = p$. On note

$$\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} = \{k_0, \ldots, k_{p-1}\} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k_0 < \ldots < k_{p-1}$$

d'où $\qquad \mathrm{P} = a_{k_0}\mathrm{X}^{k_0} + \ldots + a_{k_{p-1}}\mathrm{X}^{k_{p-1}} = \mathrm{X}^{k_0}\mathrm{Q} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = a_{k_0} + \ldots + a_{k_{p-1}}\mathrm{X}^{k_{p-1}-k_0}$

On a $$\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) \quad \text{et} \quad r^+(\mathrm{P}) = r^+(\mathrm{Q})$$

Par ailleurs, comme $\mathrm{Q}(0) \neq 0$, on trouve

$$\mathrm{N}(\mathrm{Q}') = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) - 1 < \mathrm{N}(\mathrm{P}) \quad \text{et} \quad r^+(\mathrm{Q}) \leqslant r^+(\mathrm{Q}') + 1$$

et par hypothèse de récurrence, il vient $r^+(\mathrm{Q}') \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q}') - 1$ d'où

$$r^+(\mathrm{P}) = r^+(\mathrm{Q}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q}') - 1 + 1 = \mathrm{N}(\mathrm{Q}') = \mathrm{N}(\mathrm{Q}) - 1 = \mathrm{N}(\mathrm{P}) - 1$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc établi

$$\boxed{r^+(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{P}) - 1}$$

5. On note $\mathrm{A} = \left(x_i^{p_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Supposons A non inversible. On dispose de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{C}_j = 0$ où C_j désigne la j-ième colonne de A. Ainsi, notant $\mathrm{P} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{X}^{p_j}$, on a

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \qquad \mathrm{P}(x_i) = 0$$

d'où

$$r^+(\mathrm{P}) \geqslant n \quad \text{et} \quad \mathrm{N}(\mathrm{P}) \leqslant n$$

ce qui contredit l'inégalité établie à la question précédente. On conclut

$$\boxed{\det \left(x_i^{p_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2021)

Pour x réel, on pose $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, déterminer $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de $\mathrm{G}(x)$ et $\mathrm{G}'(x)$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \qquad g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$. La fonction G est une primitive de la fonction continue g. Puis, on vérifie :
- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

- Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x,t) \in [\,-a\,;a\,] \times \mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I. La fonction F est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-a\,;a\,]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\,|x|\,\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxe inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$\mathrm{F}'(x) + (\mathrm{G}^2)'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = xt$ (pour $x \neq 0$) dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}' + (\mathrm{G}^2)' = 0}$$

Remarque : L'égalité vaut trivialement en $x = 0$.

3. La fonction $\mathrm{F} + \mathrm{G}^2$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathrm{F} + \mathrm{G}^2)(x) = (\mathrm{F} + \mathrm{G}^2)(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (x,t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

D'où, après intégration $\qquad \forall x \in \mathrm{X} \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$

et par encadrement $\qquad \mathrm{F}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $\qquad \mathrm{G}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{o}(1)}$

On conclut $\qquad \boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Exercice 6 (Mines-Telecom 2021)

Soit E euclidien. On note

$$\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle\}$$

1. Soit $f \in \mathscr{A}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Que peut-on dire de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$?
2. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2$ et note $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{A}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ contenant $\mathscr{A}(\mathrm{E})$.

Corrigé : 1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E et $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \langle f(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, f(e_i)\rangle = -a_{j,i}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$

2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. L'application $\mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), u \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$ étant un isomorphisme, le problème équivaut à résoudre l'équation matricielle

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qui équivaut à $\qquad a = d, \quad b = -c$

Ainsi

$$f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \iff \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, \mathrm{E}_{2,1} - \mathrm{E}_{1,2})$$

On conclut $\boxed{\mathscr{C}(\mathrm{E}) \text{ est un sev de } \mathscr{L}(\mathrm{E}) \text{ contenant } \mathscr{A}(\mathrm{E}).}$

Exercice 7 (Mines-Telecom 2024)

Quel est le nombre d'applications $f : [\![1\,;\, n]\!] \to [\![1\,;\, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

Corrigé : Soit f une telle application. On note $\operatorname{Im} f = \{y_1, \ldots, y_p\}$ avec $p \in [\![1\,;\, n]\!]$. Pour $i \in [\![1\,;\, p]\!]$, on dispose de $x_i \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $f(x_i) = y_i$ et

$$f(y_i) = (f \circ f)(x_i) = f(x_i) = y_i$$

ce qui signifie que les y_i sont points fixes de f. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \operatorname{Im} f \qquad f(x) \in \{y_1, \ldots, y_p\}$$

et il n'y a pas d'autre contrainte puisque pour $x \in [\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \operatorname{Im} f$, on dispose de $i \in [\![1\,;\, p]\!]$ tel que $f(x) = y_i$ puis

$$(f \circ f)(x) = f(y_i) = y_i = f(x)$$

ce qui correspond à choisir une application de $[\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} f$. Ainsi, le nombre d'applications vérifiant la condition imposée consiste à choisir p points fixes dans $[\![1\,;\, n]\!]$ avec $p \in [\![1\,;\, n]\!]$ (l'ensemble d'arrivée n'est pas vide) qui vont constituer $\operatorname{Im} f$ ce qui fait $\binom{n}{p}$ choix puis une application de $[\![1\,;\, n]\!] \smallsetminus \operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} f$ ce qui fait p^{n-p} et ceci pour p variant de $[\![1\,;\, n]\!]$ par union disjointe selon le cardinal de $\operatorname{Im} f$. Formellement, on obtient

$$\left\{f \in [\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, n]\!]} \mid f \circ f = f\right\} =$$
$$\bigsqcup_{p=1}^{n} \bigsqcup_{\mathrm{I} \subset [\![1\,;\, n]\!] \;\mid\; \operatorname{Card} \mathrm{I} = p} \left\{f \in [\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, n]\!]} \mid \forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \notin \mathrm{I} \quad f(x) \in \mathrm{I}\right\}$$

On conclut $\boxed{\operatorname{Card} \left\{f \in [\![1\,;\, n]\!]^{[\![1\,;\, n]\!]} \mid f \circ f = f\right\} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} p^{n-p}}$

Exercice 8 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev normé de dimension finie et soit $(u_n)_n \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la suite $(\|u_n - x\|)_n$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Corrigé : 1. La suite $(\|u_n\|_n)$ est convergente donc bornée. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est à valeurs dans une boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ avec $\mathrm{R} \geqslant 0$ qui est un fermé borné dans un espace de dimension finie et est donc compacte. Par conséquent

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ admet une valeur d'adhérence.}}$$

2. Soit φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathrm{E}$. Par hypothèse, on dispose de $c \geqslant 0$ tel que

$$\|u_n - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

Par extraction, il vient

$$\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \xrightarrow[n\to\infty]{} c$$

et on déduit $c = 0$ par unicité de la limite. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge.}}$$

Exercice 9 (Mines 2017)

Montrer qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}}$$

Corrigé : On a $$\ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Avec le développement limité usuel

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \mathrm{O}(u^3)$$

il vient $$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

D'après le théorème sur les séries alternées et le critère de Riemann, on a

$$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ et } \sum\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ convergent}$$

En considérant la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 2}[u_n - u_{n-1}]$ avec $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ pour n entier non nul, on établit

$$u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série téléscopique $\sum\limits_{n\geqslant 2}[u_n - u_{n-1}]$ et donc la convergence de la suite u_n.

Ainsi $$-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \sum_{k=2}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} + \mathrm{o}(1)$$

Et en passant à l'exponentielle

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}+\mathrm{o}(1)}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} > 0}$$

Exercice 10 (Mines 2019)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que l'espace E et la boule $\mathrm{B}(0,1)$ sont homéomorphes, *i.e.* qu'il existe une bijection continue entre les deux ensembles et de réciproque continue.

Corrigé : On pose
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$$

L'application f est clairement à valeurs dans $\mathrm{B}(0,1)$, continue comme composée de telles fonctions. Soit $y \in \mathrm{B}(0,1)$. Considérons l'équation $y = f(x)$. On a
$$y = f(x) \iff y(1+\|x\|) = x$$

En passant à la norme, il vient
$$\|y\|(1+\|x\|) = \|x\|$$

d'où
$$\|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|}$$

Ainsi
$$y = f(x) \iff \begin{cases} y(1+\|x\|) = x \\ \|x\| = \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|} \end{cases} \iff x = \frac{y}{1-\|y\|}$$

Ceci prouve le caractère bijectif de f avec
$$\forall y \in \mathrm{B}(0,1) \qquad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$$

L'application f^{-1} est continue comme composée de telles fonctions et on conclut

$$\boxed{\text{L'espace E et la boule } \mathrm{B}(0,1) \text{ sont homéomorphes.}}$$

Exercice 11 (Mines 2023)

Pour n entier $\geqslant 2$, on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis montrer sa convergence.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ puis un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n lorsque $n \to +\infty$;

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ avec

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

ce qui prouve que la fonction f_n décroît strictement sur $[\,0\,;1\,]$ et comme on a $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$, on en déduit que la fonction f_n réalise une bijection de $[\,0\,;1\,]$ sur $[\,2-n\,;1\,]$. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2, \text{ il existe un unique } x_n \in [\,0\,;1\,] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$ et $n \geqslant 2$. On a

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 \leqslant x^n - nx + 1 = f_n(x)$$

d'où
$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_n(x_{n+1})$$

et par décroissance stricte de f_n, on obtient $x_n \geqslant x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par zéro et par limite monotone, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante et convergente.}}$$

3. On a
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant nx_n = 1 + x_n^n \leqslant 2$$

d'où
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Ainsi
$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Puis, on observe
$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant x_n^n \leqslant x_n = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$nx_n = 1 + x_n^n = 1 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Remarque : On n'utilise pas le résultat de la question précédente.

4. Soit $n \geqslant 2$. On a $x_n^n = nx_n - 1$ d'où

$$1 = x_n^{-n}(nx_n - 1)$$

puis
$$-n\ln(x_n) + \ln(nx_n - 1) = 0$$

Par ailleurs, on a

$$n\ln(n) + n\ln(x_n) = n\ln(nx_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(nx_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} nx_n^n = \exp\left(n\left(\ln(x_n) + \frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $$n\ln(n)+\ln(nx_n-1)=\mathrm{o}(1)$$

d'où, par continuité de l'exponentielle

$$n^n(nx_n-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

Ainsi $$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+\frac{1}{n^{n+1}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)}$$

Exercice 12 (Mines-Telecom 2022)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.
2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$$

avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. Par convergence dominée, il vient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}t = 1}$$

2. Puis $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Pour n entier non nul, on pose $u = t^n$. Il vient

$$\mathrm{I}_n - 1 = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Pour $u \in \,]\,0\,;1\,]$, on a

$$\frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+u} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \leqslant 1$$

Comme $v \mapsto 1$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, il vient par convergence dominée

$$n(\mathrm{I}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = -\ln(2)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Variante : On peut aussi réaliser une intégration par parties sur $\mathrm{I}_n - 1$ avec n entier non nul. On a

$$\mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n} t\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t}{n}\ln(1+t^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on établit que l'intégrale est de limite nulle et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 13 (Mines-Telecom 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{E}$ est paire.
2. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable par f pour tout $x \in \mathrm{E}$.
3. On suppose $\dim \mathrm{E} = 2n$ avec n entier non nul. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E tels que $\mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est une base de E et préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$.

Corrigé : 1. On a $$\det(f)^2 = \det(f^2) = \det(-\mathrm{id}) = (-1)^{\dim \mathrm{E}}$$

Comme un réel au carré est positif, on conclut

$$\boxed{\text{La dimension de E est paire.}}$$

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour α, β réels, il vient

$$f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) - \beta x \in \mathrm{Vect}\,(x, f(x))$$

Ainsi $$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E}, \text{ le sev } \mathrm{Vect}\,(x, f(x)) \text{ est stable par } f.}$$

3. On construit la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ par récurrence. On choisit $e_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$. Supposons $(e_1, f(e_1))$ liée. Comme le vecteur e_1 n'est pas nul, on a $f(e_1)$ colinéaire à e_1 ce qui signifie e_1 vecteur propre de f et qui est absurde puisque le spectre réel de f est vide, le polynôme $\mathrm{X}^2 + 1$ étant annulateur de f. On suppose avoir construit $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k))$ famille libre avec $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. On complète cette famille en $(e_1, f(e_1), \ldots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ famille libre de E. Montrons la liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$. Soient $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2(k+1)}$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) = 0_{\mathrm{E}}$. Si $\beta_{k+1} = 0$, on a par hypothèse $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, k+1]\!]$ et $\beta_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\, k]\!]$. Supposons $\beta_{k+1} \neq 0$. Il vient

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i))\right) = \sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) = 0_{\mathrm{E}}$$

On note $r = \dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}$ et on écrit la combinaison

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-\beta_i e_i + \alpha_i f(e_i)) - r \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i e_i + \beta_i f(e_i)) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \left[(-\beta_i - r\alpha_i)\, e_i + (\alpha_i - r\beta_i)\, f(e_i)\right] - (\beta_{k+1} - r\alpha_{k+1})\, e_{k+1} = 0_{\mathrm{E}}$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), \ldots, e_{k+1})$, il vient

$$\forall i \in [\![1\,;\, k]\!] \qquad \begin{cases} \beta_i + r\alpha_i = 0 \\ \alpha_i - r\beta_i = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \beta_{k+1}^2 + \alpha_{k+1}^2 = 0$$

d'où $$\forall i \in [\![1\,;\, k]\!] \qquad \alpha_i(1 + r^2) = \beta_i(1 + r^2) = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1} = 0$$

et on en déduit la nullité de tous les coefficients. On construit alors la suite $(e_1, \ldots, e_n)$ selon le procédé décrit ci-avant. La famille $(e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n))$ est libre de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe une base de E de la forme } \mathscr{B} = (e_1, f(e_1), \ldots, e_n, f(e_n)) \\ \text{avec les } e_i \text{ dans E et } \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}) \text{ avec } \mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right). \end{array}}$$

Exercice 14 (Mines 2022)

On note E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour p entier non nul et $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{N}_p(f) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \left|t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)\right|$$

1. Soit p entier non nul. Montrer que N_p est une norme sur E.
2. Soit c réel et p entier non nul. Étudier la continuité de l'application $\Phi_c : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(c)$ pour la norme N_p.
3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Corrigé : 1. Soit p entier non nul et $f \in \mathrm{E}$. On a $t^p \mathrm{e}^{-|t|} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$ par croissances comparées. On en déduit que $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et la quantité N_p est donc bien définie. On remarque l'égalité

$$\mathrm{N}_p(f) = \|t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t)\|_\infty$$

Les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire en découlent. Supposons $\mathrm{N}_p(f) = 0$. Par séparation de $\|\cdot\|_\infty$, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad t^p \mathrm{e}^{-|t|} f(t) = 0$$

d'où $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et comme la fonction f est continue en particulier en zéro, on obtient $f = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{N}_p \text{ est une norme sur E.}}$$

2. Soit p entier non nul. Pour c réel, l'application Φ_c évaluation en c est clairement linéaire. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. On a

$$|f(c)| = \left|c^p \mathrm{e}^{-|c|} f(c)\right| \left|c^{-p} \mathrm{e}^{|c|}\right|$$

d'où
$$|\Phi_c(f)| \leqslant \left|c^{-p} \mathrm{e}^{|c|}\right| \mathrm{N}_p(f)$$

ce qui prouve que l'application Φ_c est lipschitzienne en zéro. Supposons ensuite $c = 0$. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = \mathrm{e}^{-n|t|}$$

Pour n entier, l'application f_n est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par parité, on observe

$$\mathrm{N}_p(f_n) = \operatorname*{Sup}_{t\geqslant 0} t^p \mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

La fonction $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-(n+1)t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto t^{p-1} \mathrm{e}^{-(n+1)t} [p - (n+1)t]$. On trouve

$$\mathrm{N}_p(f_n) = \left(\frac{p}{n+1}\right)^p \mathrm{e}^{-p}$$

d'où
$$\frac{|f_n(0)|}{\mathrm{N}_p(f_n)} = \left(\frac{n+1}{p}\right)^p \mathrm{e}^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On conclut $\boxed{\text{L'application } \Phi_c \text{ est continue si et seulement si } c \in \mathbb{R}^*.}$

3. Soient p, q entiers non nuls distincts. Sans perte de généralité, on suppose $p < q$. Avec la même famille de fonctions $(f_n)_n$ qu'à la question précédente, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{\mathrm{N}_p(f_n)}{\mathrm{N}_q(f_n)} = \frac{p^p}{q^p}(n+1)^{q-p} \mathrm{e}^{q-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On conclut

$$\boxed{\text{Pour } p,\ q \text{ entiers non nuls distincts, les normes } \mathrm{N}_p \text{ et } \mathrm{N}_q \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Exercice 15 (Mines-Telecom 2021)

1. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge et calculer sa somme S.
2. Déterminer un encadrement de S avec ses sommes partielles.
3. Montrer que le nombre S est irrationnel.

Corrigé : 1. On reconnaît la série associée à $\cos(1)$ puisque $\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^n}{(2n)!}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ converge et sa somme S vaut } \cos(1).}$$

2. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

On a

$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \frac{1}{(2(n+1)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$$

et

$$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n-1} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!} > 0$$

La suite $(\mathrm{S}_{2n})_n$ décroît strictement et la suite $(\mathrm{S}_{2n+1})_n$ croît strictement. Or, ces deux suites sont adjacentes puisque $\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et de limite commune S. Ainsi, on a l'encadrement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{2n+1} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}}$$

3. Soit n entier. On a

$$\mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}_{2n} - \frac{1}{(4n+2)!} < \mathrm{S} < \mathrm{S}_{2n}$$

d'où

$$0 < \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S} < \frac{1}{(4n+2)!}$$

et ainsi

$$0 < (4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S} < 1$$

La quantité $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n}$ est un entier relatif en tant que somme d'entiers relatifs. Supposons S rationnel, à savoir $\mathrm{S} = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Si n est assez grand, alors $(4n+2)!\dfrac{p}{q}$ est entier (puisque q est facteur d'une factorielle assez grande) et par conséquent, le nombre $(4n+2)!\mathrm{S}_{2n} - (2n+1)!\mathrm{S}$ est un entier relatif dans $]\,0\,;1\,[$ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Le nombre S est irrationnel.}}$$

Exercice 16 (Mines-Telecom 2021)

Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale de paramètres n entier non nul et $p \in]0;1[$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) & \mathrm{X}(\omega) \\ \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) & \mathrm{Y}(\omega) \\ \mathrm{Z}(\omega) & \mathrm{Z}(\omega) & \mathrm{Z}(\omega) \end{pmatrix}$$

1. À l'aide de fonctions génératrices, montrer que $\mathrm{S} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$ suit une loi binomiale et préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M et S.
3. Calculer la probabilité que M soit un projecteur.

Corrigé : 1. Soit $t \in [0;1]$. Par indépendance, il vient

$$\mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t)\mathrm{G_Z}(t) = (pt + 1 - p)^{3n}$$

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \sim \mathscr{B}(3n, p) \qquad \mathbb{E}(\mathrm{S}) = 3np \qquad \mathbb{V}(\mathrm{S}) = 3np(1-p)}$$

2. On observe $$\mathrm{M} = \mathrm{CU}^\top \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par associativité du produit matriciel, il vient

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{C}\left(\mathrm{U}^\top \mathrm{C}\right)\mathrm{U}^\top = (\mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z})\mathrm{CU}^\top$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{M}^2 = \mathrm{SM}}$$

3. On a

$$\{\mathrm{M} \text{ projecteur}\} = \{\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{SM} = \mathrm{M}\} = \{\mathrm{M} = 0\} \sqcup \{\mathrm{M} \neq 0, \mathrm{S} = 1\} = \{\mathrm{S} = 0\} \sqcup \{\mathrm{S} = 1\}$$

Ainsi $$\mathbb{P}\left(\mathrm{M} \text{ projecteur}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{S} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{S} = 1)$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{M} \text{ projecteur}\right) = (1-p)^{3n} + 3np(1-p)^{3n-1}}$$

Exercice 17 (Mines 2016)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ et on considère $\mathrm{T} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ défini par

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \forall x \in [0;1] \qquad \mathrm{T}(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continu de E.
2. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{f\in\mathrm{E}\smallsetminus\{0_\mathrm{E}\}} \frac{\|\mathrm{T}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

Corrigé : 1. L'application T est clairement linéaire et à valeurs dans E d'après les théorèmes généraux. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application T est un endomorphisme continu de E.}}$

2. Notons $\|\mathrm{T}\| = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{f\in\mathrm{E}\smallsetminus\{0_\mathrm{E}\}} \frac{\|\mathrm{T}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$. D'après le résultat de la question précédente, on a $\|\mathrm{T}\| \leqslant 2$. Pour $f = \mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1, on trouve

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = 2 \quad \text{avec} \quad \|f\|_\infty = 1$$

autrement dit, la borne supérieure est atteinte et on a

$$\boxed{\|\mathrm{T}\| = 2}$$

3. Pour $f = \mathbb{1}$, on a $\mathrm{T}(f) = 2f$ ce qui justifie que $2 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{T})$. Soit $f \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{T}(f) = 2f$, autrement dit

$$\forall x \in [0;1] \qquad 2f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{1}$$

La fonction f est continue sur le segment $[0;1]$ donc est bornée et y atteint ses bornes. On note α et β les valeurs dans $[0;1]$ en lesquelles f atteint respectivement son minimum et son maximum. On a

$$2f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant f(\alpha) \qquad f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \geqslant f(\alpha)$$

Si on a $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > f(\alpha)$ ou $f\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right) > f(\alpha)$, alors l'égalité précédente n'a pas lieu. Ainsi, on a

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Par récurrence immédiate en réinjectant dans l'égalité (**1**), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

et par continuité $$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$$

ce qui prouve $f(\alpha) = f(0)$. Le même raisonnement permet d'établir $f(\beta) = f(0)$ et on conclut que f est une fonction constante. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{E}_2(\mathrm{T}) = \mathrm{Vect}\,(\mathbb{1})}$$

Exercice 18 (Mines-Telecom 2019)

On pose $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}$

Soit $x > 0$. La séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ vérifie clairement le critère des séries alternées d'où la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $a > 0$. Par contrôle du reste, on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,a\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}$$

d'où
$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \frac{(-1)^n x}{1+nx}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ vérifie le critère des séries alternées d'où, par contrôle du reste

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et comme on a

$$v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

on obtient, par théorème de la double limite

$$x\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}}$$

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}$$

Pour $x > 0$ fixé, on pose $\qquad \forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \frac{u}{(1+ux)^2}$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation

$$\forall u > 0 \qquad \varphi'(u) = \frac{(1+ux)\,[(1+ux)-2xu]}{(1+ux)^4} = \frac{(1+ux)\,(1-xu)}{(1+ux)^3}$$

On en déduit que φ décroît sur $\left[\,\dfrac{1}{x}\,;+\infty\,\right[$ et par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang. Ainsi par contrôle du reste d'une série alternée, pour $a > 0$, en observant que pour $x \geqslant a$, on a l'implication $n \geqslant 1/a \Longrightarrow n \geqslant 1/x$, on obtient alors

$$\forall n \geqslant \frac{1}{a} \qquad \forall x \geqslant a \qquad |\mathrm{R}'_n(x)| \leqslant \frac{(n+1)}{(1+(n+1)x)^2} \leqslant \frac{(n+1)}{(1+(n+1)a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u'_n$ sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 19 (Mines-Telecom 2018)

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ le système $\quad (S) : \begin{cases} x+y=\bar{4} \\ xy = \bar{10} \end{cases}$

Corrigé : Comme 11 est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est un corps. Si x et y sont solutions de (S), alors, par substitution, ils sont solutions de $z^2-4z+10=0\ [11]$. On a

$$z^2-4z+10 \equiv 0\ [11] \iff z^2-4z-1 \equiv 0\ [11]$$
$$\iff (z-2)^2-4^2 \equiv 0\ [11] \iff (z+2)(z-6) \equiv 0\ [11] \iff \bar{z} \in \{-\bar{2}, \bar{6}\}$$

la dernière équivalence utilisant l'intégrité du corps. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{(S) \iff (x,y) \in \{(-\bar{2},\bar{6}),(\bar{6},-\bar{2})\}}$$

Exercice 20 (Centrale 2018)

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top\mathrm{B})$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. On suppose $n = 2$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$ avec $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $\mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{R})$.
   (b) Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. À l'aide des applications définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_\mathrm{M} : x \mapsto \mathrm{R}\exp(x\mathrm{M})$ et $f_\mathrm{M} : x \mapsto \|\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{M}(x)\|^2$, montrer qu'il existe $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{RS}$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top$. On a $\varphi^2 = \mathrm{id}$ et $\varphi \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ sans difficulté. Par conséquent, l'application φ est une symétrie orthogonale et il s'ensuit

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{id}\,)$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

2. Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ réel. Pour θ réel, on a

$$\mathrm{R}(-\theta)\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + 3\sin(\theta) & \cos(\theta) + \sin(\theta) \\ 3\cos(\theta) - \sin(\theta) & \cos(\theta) - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \mathrm{R}(-\theta)\mathrm{A} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R}) &\iff \cos(\theta) + \sin(\theta) = 3\cos(\theta) - \sin(\theta) \\ &\iff \cos(\theta) = \sin(\theta) \iff \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \end{aligned}$$

On choisit par exemple $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et on trouve

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{RS} \quad \text{avec} \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3.(a) On rappelle que $\quad \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{M}^\top\mathrm{M} = \mathrm{I}_n, \det(\mathrm{M}) = 1\right\}$

Les applications $\psi_1 : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\top\mathrm{M}$ et $\psi_2 : \mathrm{M} \mapsto \det(\mathrm{M})$ sont à coordonnées polynomiales en les coefficients de la matrice et sont par conséquent continues. Ainsi, l'égalité

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \psi_1^{-1}(\{\mathrm{I}_n\}) \cap \psi_2^{-1}(\{1\})$$

garantit la fermeture de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. On a clairement $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{S}(0, \sqrt{n})$ ce qui prouve que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie E et par conséquent l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est compact. Enfin, notons $h : \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathrm{R} \mapsto \|\mathrm{A} - \mathrm{R}\|$. Par définition, on a $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \operatorname*{Inf}_{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})} h$. Or, l'application h est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire inverse donc continue sur le compact $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'application h atteint son minimum ce qui prouve

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{R} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{R}).}$$

3.(b) Soit x réel et $\mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\varphi_\mathrm{M}(x)^\top \varphi_\mathrm{M}(x) = \exp(-x\mathrm{M})\mathrm{R}^\top\mathrm{R}\exp(x\mathrm{M}) = \exp(-x\mathrm{M})\exp(x\mathrm{M}) = \mathrm{I}_n$$

et $$\det(\varphi_x(\mathrm{M})) = \exp(x\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})) = \exp(0_{\mathrm{E}}) = 1$$

Ainsi, l'application φ_{M} est à valeurs dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Avec $\varphi_{\mathrm{M}}(0)\mathrm{R}$, on en déduit que l'application f_{M} admet un minimum en 0. Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{\mathrm{M}}(x) = \langle \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A}, \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A} \rangle$$

comme φ_{M} est dérivable sur $\mathbb{R}$ par dérivabilité de l'exponentielle matricielle, il s'ensuit par bilinéarité du produit scalaire que f_{M} est dérivable avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'_{\mathrm{M}}(x) = 2\,\langle \varphi_{\mathrm{M}}(x) - \mathrm{A}, \varphi'_{\mathrm{M}}(x) \rangle \quad \text{avec} \quad \varphi'_{\mathrm{M}}(x) = \mathrm{RM}\exp(x\mathrm{M})$$

Comme la fonction f_{M} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un minimum en 0, on a

$$f'_{\mathrm{M}}(0) = 2\,\langle \mathrm{R} - \mathrm{A}, \mathrm{RM} \rangle = 0$$

et comme le choix de M est quelconque dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, on a donc montré

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{R} - \mathrm{A}, \mathrm{RM} \rangle = 0$$

La matrice $\mathrm{R}^\top$ est une matrice d'isométrie donc par conservation du produit scalaire, on a

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \left\langle \mathrm{R}^\top(\mathrm{R} - \mathrm{A}), \mathrm{R}^\top\mathrm{RM} \right\rangle = \left\langle \mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A}, \mathrm{M} \right\rangle = 0$$

autrement dit $$\mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

Il s'ensuit $$\mathrm{S} = \mathrm{R}^\top\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n - \mathrm{R}^\top\mathrm{A}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

Et on conclut $$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{A} = \mathrm{RS}.}$$