

## Exercice 1 (Centrale 2021)

Soit  $n$  entier non nul et  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  la norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  subordonnée à la norme euclidienne canonique,  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall M \in G \quad \|M - I_n\|_{\text{op}} \leq 1$$

1. Soit  $M \in G$  et  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ . Montrer  $|\lambda - 1| \leq 1$ .
2. (a) On admet que le résultat précédent s'étend aux valeurs propres complexes de  $M$ . Montrer que pour  $M \in G$ , la matrice  $M - I_n$  est nilpotente.
- (b) Établir  $G = \{I_n\}$
3. Démontrer le résultat admis précédemment.

**Corrigé :** 1. Soit  $M \in G$ ,  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tel que  $. Il vient$

$$|\lambda - 1| \|X\| = \|MX - X\| \leq \|M - I_n\|_{\text{op}} \|X\|$$

Ainsi

$$\boxed{|\lambda - 1| \leq 1}$$

2.(a) Soit  $M \in G$  et  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ . Comme  $G$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ , on a  $M^k \in G$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tel que  $MX = \lambda X$ , il vient  $M^k X = \lambda^k X$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par récurrence immédiate. En multipliant par  $M^{-1}$  à gauche l'égalité  $MX = \lambda X$ , on obtient  $X = \lambda M^{-1}X$  et  $\lambda \neq 0$  car  $M$  inversible d'où  $M^{-1}X = \lambda^{-1}X$ . Par récurrence, il vient  $M^{-k}X = \lambda^{-k}X$  pour tout  $k$  entier. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\lambda^k - 1| \leq 1$$

Il s'ensuit que la suite  $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est bornée d'où  $|\lambda| = 1$  et donc  $\lambda = e^{i\theta}$  avec  $\theta$  réel.

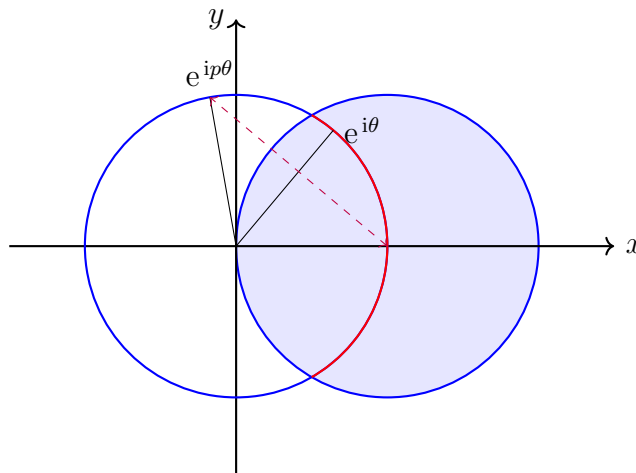


FIGURE 1 – Localisation du spectre

Supposons  $\lambda \neq 1$ . On a  $|e^{i\theta} - 1| \leq 1 \iff 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \leq 1$

d'où  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right[$ . Quitte à considérer  $\lambda^{-1}$ , on peut supposer  $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{3} \right[$ . On choisit  $p$  entier non nul minimal tel que  $p\theta > \frac{\pi}{3}$ . On a donc  $(p-1)\theta \leq \frac{\pi}{3}$  puis

$$\frac{\pi}{3} < p\theta \leq \frac{\pi}{3} + \theta < \frac{2\pi}{3}$$

d'où 
$$|e^{ip\theta} - 1| = 2 \left| \sin \left( \frac{p\theta}{2} \right) \right| > 1$$

ce qui est absurde. On conclut  $\lambda = 1$  et par conséquent, la matrice  $M - I_n$  trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  a son spectre réduit à  $\{0\}$  et on conclut

$$\boxed{\text{Pour } M \in G, \text{ la matrice } M - I_n \text{ est nilpotente.}}$$

2.(b) La suite  $(M^k)_k$  est à valeurs dans  $G \subset B_f(0, 1)$  donc bornée. Supposons  $M$  non diagonalisable et notons  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associé à  $M$ . Le polynôme minimal  $\pi_u$  est scindé mais pas à racines simples. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  de multiplicité  $\alpha \geq 2$ . On note  $\pi_u = (X - \lambda)^\alpha Q$  avec  $Q \in \mathbb{C}[X]$ . On note  $u_\lambda$  l'induit par  $u$  sur le sev stable  $F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})^\alpha$ . On a  $u_\lambda = \lambda \text{id}_{F_\lambda} + n_\lambda$  avec  $n_\lambda \in \mathcal{L}(F_\lambda)$  nilpotent d'indice  $\alpha$ . En effet, si l'indice était  $< \alpha$ , alors on aurait  $(X - \lambda)^{\alpha-1} Q$  annulateur de  $u$  en considérant la décomposition  $E = F_\lambda \oplus \text{Ker } Q(u)$  résultant du lemme des noyaux. On choisit  $x \in F_\lambda$  tel que  $n_\lambda^{\alpha-1}(x) \neq 0$ . La famille  $(n_\lambda^{\alpha-2}(x), n_\lambda^{\alpha-1}(x))$  est clairement libre et on trouve

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) &= (\lambda \text{id}_{F_\lambda} + n_\lambda)^k(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) \\ &= (\lambda^k \text{id}_{F_\lambda} + k\lambda^{k-1}n_\lambda + \dots)(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) \\ u^k(n_\lambda^{\alpha-2}(x)) &= \lambda^k n_\lambda^{\alpha-2}(x) + k\lambda^{k-1}n_\lambda^{\alpha-1}(x) \end{aligned}$$

Dans une base obtenue par complétion de la famille  $(n_\lambda^{\alpha-2}(x), n_\lambda^{\alpha-1}(x))$ , la composante portée par  $n_\lambda^{\alpha-1}(x)$  est non bornée ce qui est impossible. On en déduit que  $u$  et donc  $M$  est diagonalisable. Il s'ensuit que  $M - I_n$  est aussi diagonalisable et comme cette matrice est nilpotente, son spectre est réduit à  $\{0\}$  et il s'agit donc de la matrice nulle. On conclut

$$\boxed{G = \{I_n\}}$$

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|=1} \|AX\| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|=1} \sqrt{X^\top A^\top A X}$$

La matrice  $A^\top A$  symétrique réelle est diagonalisable et notant  $\rho(A^\top A) = \max \text{Sp}(A^\top A)$ , on trouve après réduction

$$\|A\|_{\text{op}} = \sqrt{\rho(A^\top A)}$$

Considérons ensuite  $A$  vue comme matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  muni de la norme  $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$  pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On a

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|X\|=1} \|AX\| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|X\|=1} \sqrt{X^\top A^\top A X}$$

On dispose de  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^\top A^\top A P = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec les  $\lambda_i \geq 0$ . Ainsi, avec  $X = PY$  de coordonnées les  $y_i$ , on obtient

$$\bar{X}^\top A^\top A X = \bar{Y}^\top D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \leq \rho(A^\top A) \bar{Y}^\top Y = \rho(A^\top A) \|X\|^2$$

et ce majorant est atteint pour un bon choix de  $Y$  et donc de  $X$ . On retrouve la même valeur pour la norme d'opérateur de  $A$ , que celle-ci soit traitée dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ . Par ailleurs, on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \|AX\| \leq \|A\|_{\text{op}} \|X\|$$

pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . En appliquant ceci avec  $\|M - I_n\|_{\text{op}}$  pour  $M - I_n$  vue comme matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on conclut

$$\boxed{\forall M \in G \quad \lambda \in \text{Sp}(M) \quad |\lambda - 1| \leq 1}$$

**Remarque :** Est-ce vraiment ce qui est attendu? ...

## Exercice 2 (Mines-Telecom 2021)

Soit  $E = \mathbb{C}[X]$  muni de la norme définie par  $\|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$  avec  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ . Pour  $b \in \mathbb{C}$ , on pose

$$\forall P \in E \quad f(P) = P(b)$$

1. Montrer que l'application  $f$  est linéaire.
2. Étudier la continuité de  $f$ .

**Corrigé :** 1. Immédiat.

2. Supposons  $|b| < 1$ . Pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ , on a par inégalité triangulaire

$$|f(P)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |b|^k \leq \|P\| \sum_{k=0}^n |b|^k \quad \text{avec } n = \deg P$$

d'où 
$$|f(P)| \leq \|P\| \frac{1 - |b|^{n+1}}{1 - |b|} \leq \|P\| \frac{1}{1 - |b|}$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien en zéro et donc la continuité de  $f$ . Supposons  $|b| \geq 1$ . On pose  $P_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{X}{b}\right)^k$  pour  $n$  entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f(P_n) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

On en déduit que  $f$  n'est pas continue. On conclut

L'application  $f$  est continue si et seulement si  $|b| < 1$ .

### Exercice 3 (Mines-Telecom 2022)

Soit  $E$  euclidien avec  $\dim E = n \geq 2$  et  $(u, v)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ . On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Déterminer les éléments propres de  $f$ .

**Corrigé :** 1. L'application  $f$  est à valeurs dans  $E$  et linéaire par bilinéarité du produit scalaire et du produit. Pour  $(x, y) \in E^2$ , il vient

$$\langle f(x), y \rangle = \langle u, x \rangle \langle v, y \rangle + \langle v, x \rangle \langle u, y \rangle$$

expression symétrique en  $x$  et  $y$ . Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{S}(E)}$$

2. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable. On note  $F = \text{Vect}(u, v)$ .

Sans difficulté, on observe  $\forall x \in F^\perp \quad f(x) = 0$

Le sev  $F$  est clairement stable par  $f$  et notant  $g$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$  et  $\mathcal{B}_F = (u, v)$ , on trouve

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}_F} g = \begin{pmatrix} \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \end{pmatrix}$$

Puis

$$\begin{aligned} \chi_g &= (X - \langle u, v \rangle)^2 - (\|u\| \|v\|)^2 \\ &= (X - \langle u, v \rangle - \|u\| \|v\|)(X - \langle u, v \rangle + \|u\| \|v\|) \end{aligned}$$

La famille  $(u, v)$  étant libre, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas réalisé et on en déduit que les deux valeurs propres précédemment exhibées ne sont pas nulles. On résout

$$\begin{aligned} (A - (\langle u, v \rangle + \|u\| \|v\|)I_2) X = 0 &\iff \begin{pmatrix} -\|u\| \|v\| & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & -\|u\| \|v\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y) \in \text{Vect}(\|v\|, \|u\|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A - (\langle u, v \rangle - \|u\| \|v\|)I_2) X = 0 &\iff \begin{pmatrix} \|u\| \|v\| & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \|u\| \|v\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x, y) \in \text{Vect}(-\|v\|, \|u\|) \end{aligned}$$

On conclut

On a  $\text{Sp}(f) = \{0, \langle u, v \rangle + \|u\| \|v\|, \langle u, v \rangle - \|u\| \|v\|\}$  et les sous-espaces propres associés sont respectivement  $\text{Vect}(u, v)^\perp$ ,  $\text{Vect}(\|v\|, \|u\|)$ ,  $\text{Vect}(-\|v\|, \|u\|)$ .

## Exercice 4 (Centrale 2021)

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

1. Justifier l'existence de  $I_n$  pour  $n$  entier non nul puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
2. (a) Établir une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$  pour  $n$  entier non nul.  
(b) En déduire un réel  $\alpha$  tel que la suite  $(\ln(n^\alpha I_n))_n$  converge.
3. Déterminer un équivalent simple de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Corrigé :** 1. On pose  $\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times ]0; +\infty[ \quad f_n(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n}$

Pour  $n$  entier non nul, on a  $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$  puis

$$\forall t > 0 \quad f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f_n(t) \leq f_1(t)$$

La fonction  $f_1$  est intégrable sur  $]0; +\infty[$  par comparaison et critère de Riemann puisque  $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ . La domination assure l'intégrabilité de  $f_n$  pour tout  $n$  entier non nul et d'après le théorème de convergence dominée, on conclut

$$\text{La suite } (I_n)_{n \geq 1} \text{ est bien définie et } I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

2.(a) Soit  $n$  entier non nul. On a

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{(1+t^3)^n} - \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} \right] dt$$

Il vient par linéarité car convergence des intégrales concernées

$$I_{n+1} - I_n = - \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt$$

Les fonctions  $t \mapsto -\frac{1}{3n(1+t^3)^n}$  et  $t \mapsto t$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  avec

$$-\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Par intégration par parties et convergence de l'intégrale concernée, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}} dt = \left[ -\frac{t}{3n(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

Ainsi  $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{3n} I_n$

On conclut  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$

2.(b) Soit  $n$  entier non nul. On a

$$\ln\left(\frac{(n+1)^\alpha I_{n+1}}{n^\alpha I_n}\right) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right) = \frac{3\alpha - 1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que la série  $\sum [\ln((n+1)^\alpha I_{n+1}) - \ln(n^\alpha I_n)]$  converge si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{3}$ .  
D'après le lien suite/série télescopique, on conclut

La suite  $(\ln(n^\alpha I_n))_n$  converge si et seulement si  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

3. Soit  $n$  entier non. Avec le changement de variables  $t = \frac{u}{n^{\frac{1}{3}}}$ , les intégrales étant de même nature, il vient

$$n^{\frac{1}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u^3}{n}\right)^n}$$

On observe  $\forall u \geq 0 \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{u^3}{n}\right)^n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{u^3}{n}\right)} = e^{-n\left(\frac{u^3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-u^3}$

Avec l'inégalité  $\forall x \geq 0 \quad (1+x)^n = 1 + nx + \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx$

On obtient

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times [0; +\infty[ \quad 0 \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{u^3}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + u^3}$$

La dominante étant intégrable sur  $[0; +\infty[$ , on conclut par convergence dominée

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt$$

## Exercice 5 (Mines 2023)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)_n$  une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .

- Déterminer la loi de  $Z_n = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} X_k$ .
- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq 3^n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq 2^n)$ .

**Corrigé :** 1. Soit  $n$  entier. On sait que tout entier de  $\llbracket 0; 2^{n+1} - 1 \rrbracket$  possède une unique écriture binaire de la forme  $\sum_{k=0}^n d_k 2^k$  avec les  $d_k \in \{0, 1\}$  ou, de manière équivalente, de la forme  $\sum_{k=0}^n x_k 2^{n-k}$  avec les  $x_k \in \{0, 1\}$ . Ainsi, par indépendance des  $X_k$ , on a pour  $(x_0, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(Z_n = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} x_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n \{X_k = x_k\}\right) = \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

On conclut

$$\boxed{Z_n \sim \mathcal{U}_{\llbracket 0; 2^{n+1} - 1 \rrbracket}}$$

2. Soit  $n$  entier. On a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} k \mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{(2^{n+1} - 1)2^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(2^{n+1} - 1)$$

La variable aléatoire  $Z_n$  est positive et d'après l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathbb{P}(Z_n \geq 3^n) \leq \frac{1}{3^n} \mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{2 \times 3^n} (2^{n+1} - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n \geq 3^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

Puis, on a  $\{X_n = 0\} = \left\{Z_n \leq \sum_{k=1}^n 2^{n-k} = 2^n - 1\right\} = \{Z_n < 2^n\}$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(Z_n \geq 2^n) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}}$$

**Remarque :** Demander la limite d'une suite constante est un peu déroutant...

## Exercice 6 (Mines 2024)

Soit  $n$  entier avec  $n \geq 2$ . Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$$

**Corrigé :** On a

$$S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (i\sqrt{3})^{2k}$$

En considérant la somme associée avec les indices impairs, on trouve

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (i\sqrt{3})^{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (i\sqrt{3})^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i\sqrt{3})^k = (1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

Ainsi

$$S_n = \operatorname{Re} \left( 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} \right) = 2^n \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right)$$

On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et on pose

$$T_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} \quad U_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} \quad V_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$$

En remarquant  $j^{3k} = 1$  pour tout  $k$  entier, il vient

$$\begin{cases} T_n + U_n + V_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \\ T_n + jU_n + j^2V_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = (1+j)^n \\ T_n + j^2U_n + jV_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} = (1+\bar{j})^n \end{cases}$$

On a  $1 + j = e^{\frac{i\pi}{3}}$  et par sommation des trois lignes du système, on conclut

$$T_n = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) \right)$$

## Exercice 7 (Centrale 2022)

Soit  $E$  un espace préhilbertien de dimension (finie ou non) supérieure ou égale à 2. Soit  $f : E \rightarrow E$  telle que

- (i)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$  ;
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$ .

1. Montrer :

- (a)  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{Q} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$  ;
- (b)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est bornée sur  $B_f(0, 1)$ .

3. Montrer que la fonction  $f$  est continue puis qu'il s'agit d'une similitude vectorielle, *i.e.* une constante fois une isométrie vectorielle.

**Corrigé :** 1.(a) On a  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  d'où  $f(0) = 0$ . Soit  $x \in E$ . Une récurrence immédiate donne  $f(nx) = nf(x)$  pour tout  $n$  entier. Puis, on observe  $0 = f(x - x) = f(x) + f(-x)$  d'où  $f(-x) = -f(x)$  et par récurrence, il vient  $f(-nx) = -nf(x)$  pour tout  $n$  entier. Enfin, pour  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , on obtient

$$qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (\lambda, x) \in \mathbb{Q} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)}$$

1.(b) Considérons  $u$  et  $v$  dans  $E$  unitaires. On a

$$\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0$$

d'où  $\langle f(u + v), f(u - v) \rangle = \langle f(u) - f(v), f(u) + f(v) \rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0$

ce qui prouve  $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ . Soit  $(x, y) \in E^2$ , non nuls. Posant  $u = x/\|x\|$  et  $v = y/\|y\|$ , on en déduit

$$\|y\|\|f(x)\| = \|x\|\|f(y)\|$$

On conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x\| = \|y\| \implies \|f(x)\| = \|f(y)\|}$$

2. D'après ce qui précède, la fonction  $x \in E \mapsto \|f(x)\|$  est constante sur la sphère unité  $S(0, 1)$ . Notons  $\alpha$  la valeur prise par  $f$  sur  $S(0, 1)$ . Soit  $x \in B(0, 1)$ . On choisit  $u \in \text{Vect}(x)^\perp$  tel que  $\|u\| = \sqrt{1 - \|x\|^2}$ . Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, il vient

$$\|x + u\|^2 = \|x\|^2 + \|u\|^2 = 1$$

d'où  $\|f(x + u)\| = \alpha$ . Par choix de  $u \perp x$ , on a  $f(u) \perp f(x)$  et par ailleurs  $f(x + u) = f(x) + f(u)$ . D'après le théorème de Pythagore, on trouve

$$\|f(x + u)\|^2 = \|f(x) + f(u)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(u)\|^2 = \alpha^2$$

et par suite

$$\|f(x)\| \leq \alpha$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bornée sur } B_f(0, 1).$$

3. Soit  $(x, y) \in E^2$  avec  $x \neq y$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on a  $[\|x - y\|; 2\|x - y\|] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ . On dispose donc de  $\lambda \in [1; 2]$  tel que  $\lambda\|x - y\| \in \mathbb{Q}$ . D'après le résultat des questions précédentes, il vient

$$\left\| f\left(\frac{x-y}{\lambda\|x-y\|}\right) \right\| = \frac{1}{\lambda\|x-y\|} \|f(x-y)\| \leq \alpha$$

d'où  $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq \alpha\lambda\|x-y\| \leq 2\alpha\|x-y\|$

L'application  $f$  est donc lipschitzienne et par conséquent

La fonction  $f$  est continue.

Soit  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on dispose de  $(\lambda_n)_n$  suite à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  telle que  $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$ . Par continuité de  $f$ , on obtient

$$f(\lambda_n x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\lambda x)$$

or  $f(\lambda_n x) = \lambda_n f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda f(x)$

Par unicité de la limite, on trouve  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

ce qui prouve  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Ainsi, pour  $x \neq 0_E$ , on a

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \alpha$$

d'où  $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$  et l'égalité vaut aussi pour  $x = 0$ . Si  $\alpha = 0$ , on peut écrire  $f = \alpha \text{id}$  et le résultat attendu a lieu. Supposons  $\alpha \neq 0$ . L'application  $\frac{1}{\alpha}f$  est donc un endomorphisme de  $E$  qui préserve la norme et on conclut

L'application  $f$  est une similitude.

## Exercice 8 (Mines-Telecom 2023)

Pour  $x$  réel, on pose 
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

1. Montrer que  $F$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire une expression simple de  $F(x)$  pour  $x$  réel.

**Corrigé :** 1. L'intégrande est impaire et on va donc se restreindre à l'étude sur  $\mathbb{R}_+$ . On pose

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

avec  $X = \mathbb{R}_+$  et  $I = ]0; +\infty[$ . Vérifions les hypothèses du théorème de régularité  $\mathcal{C}^1$  sous l'intégrale.

- Pour  $x \in X$ , on a  $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$  par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{xt}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} x \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de  $t \mapsto f(x, t)$  sur  $I$ .

- Pour  $t \in I$ , on a  $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$  par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

- Pour  $x \in X$ , on a  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$  par théorèmes généraux.

- **Domination :** On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction  $\varphi$  est dans  $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ , intégrable sur  $I$  puisque  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ .

Par imparité, on étend le résultat sur  $\mathbb{R}$  et on conclut

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. Soit  $x \geq 0$  et  $x \neq 1$ . Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left[ \frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right]$$

On suppose également  $x \neq 0$  pour l'intégration du second membre. Il vient

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right] dt = \frac{1}{1-x^2} \frac{\pi}{2} (1-x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour  $x = 0$ . Par ailleurs, comme  $F'$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x)$  et par conséquent

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Par intégration, il vient

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u) du = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$$

En complétant par imparité de  $F$ , on conclut

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Remarque :** Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u+1-x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)} \frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en  $u = t^2$ .

## Exercice 9 (Mines-Telecom 2022)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction  $k$ -lipschitzienne avec  $k \in [0; 1[$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  admet un point fixe.
2. Montrer que ceci est faux si on suppose seulement

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

**Corrigé :** 1 . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On pose  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n$  entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k |x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$

La série  $\sum k^n$  converge d'où la convergence absolue et donc la convergence de la série télescopique  $\sum [x_{n+1} - x_n]$ . On en déduit  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  et comme la fonction  $f$  est continue, il vient en faisant tendre  $n \rightarrow +\infty$  dans la relation  $x_{n+1} = f(x_n)$  l'égalité  $f(\ell) = \ell$ . On conclut

La fonction  $f$  admet un point fixe.

2. On pose  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $x \neq y$ . On a

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - (y^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}$$

d'où  $|f(x) - f(y)| = |x - y| \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} < |x - y| \frac{|x| + |y|}{|x| + |y|}$

c'est-à-dire  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$

et la fonction  $f$  n'admet clairement pas de point fixe. On conclut

Le résultat est faux en supposant seulement strictement 1-lipschitzienne.

## Exercice 10 (Mines-Telecom 2023)

On pose  $\forall n \geq 2 \quad u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k}$

1. Établir  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}$

2. Déterminer un équivalent de  $u_n - \frac{\ln(n)^2}{2}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Corrigé :** 1. On a  $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\ln(k)}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k+1)}{k}$

d'où  $\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}$

Par sommation des relations de comparaison avec la série à termes positifs clairement divergente  $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln(k)}{k}$ , il vient

$$\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{(\ln(n+1))^2}{2}$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{2}}$$

2. On pose  $\forall x \geq 1 \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$

La fonction  $F$  est primitive d'une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et est donc elle-même de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ . Par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad F''(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Soit  $k \geq 1$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient

$$|F(k+1) - F(k) - F'(k)| \leq \frac{1}{2} \|F^{(2)}\|_{\infty, [k; k+1]}$$

avec  $\|F^{(2)}\|_{\infty, [k; k+1]} \leq \frac{\ln(k+1) + 1}{k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(k)}{k^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$

Puis, il vient pour  $n$  entier non nul

$$\sum_{k=1}^n (F(k+1) - F(k) - F'(k)) = F(n+1) - \sum_{k=1}^n F'(k) = \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Par critère de Riemann, il existe  $\lambda$  réel tel que

$$\sum_{k=1}^n F'(k) - F(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$$

c'est-à-dire  $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \int_1^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt = \lambda + o(1)$

ou encore 
$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \left[ \frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^{n+1} = \lambda + o(1)$$

On a 
$$\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où 
$$\ln(n+1)^2 = \ln(n)^2 + o(1)$$

On conclut 
$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(n)^2}{2} + \lambda + o(1)}$$

**Remarque :** La constante  $\lambda$  ne semble pas simple à déterminer ... Elle porte un nom : on l'appelle *constante de Stieljes*.

## Exercice 11 (Mines-Telecom 2021)

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ . Soit  $r$  entier non nul. On définit

$$T_r = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{i=1}^n X_i = r \right\} \cup \{+\infty\}$$

1. Identifier la loi de  $T_1$ .
2. Calculer  $\mathbb{P}(T_r = n)$  avec  $n$  entier non nul.
3. Montrer que l'événement  $\{T_r = +\infty\}$  est négligeable.

**Corrigé :** Pour  $n$  entier non nul, on a

$$\{T_r = n\} = \{X_n = 1\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i = r - 1 \right\} \quad \text{et} \quad \{T_r = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < r \right\}$$

ce qui justifie que  $T_r$  est bien une variable aléatoire réelle discrète.

1. La loi de  $T_1$  est la loi géométrique de paramètre  $p$  puisqu'on détermine le premier rang d'obtention de 1 dans une succession de tirages de variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre.

2. Par indépendance de  $X_n$  et  $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$  et comme  $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n-1, p)$  en tant que somme de  $n-1$  variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , il vient

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \mathbb{P} \left( \{X_n = 1\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} X_i = r - 1 \right\} \right) = \mathbb{P}(X_n = 1) \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^{n-1} X_i = r - 1 \right)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}}$$

3. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Par dérivation de séries entières, on trouve

$$\forall x \in ]-1; 1[ \quad \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \left[ \frac{1}{1-x} \right] = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{n=r-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r+1)!} x^{n-r+1}$$

d'où

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} x^{k-r}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) = 1$$

et comme  $(\{T_r = n\})_{n \geq 1} \cup \{T_r = +\infty\}$  est un système complet d'événements, on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_r = n) = 0}$$

**Variante :** On peut aussi écrire

$$\{T_r = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < r \right\}$$

et on remarque  $\forall n \geq 1 \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} X_i < r \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < r \right\}$

Par continuité décroissante, on obtient

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i < r \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_r < +\infty)$$

On a  $\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i < r \right) = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i = k \right) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pour  $n$  entier non nul et  $k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$ , on observe

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} &= \left( \frac{p}{1-p} \right)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} (1-p)^n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{p}{1-p} \right)^k \frac{n^k}{k!} (1-p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

par croissances comparées. On retrouve  $\mathbb{P}(T_r = +\infty) = 0$ .

## Exercice 12 (Centrale 2016)

Pour  $n$  entier non nul, on pose  $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - 1$

1. Pour  $n$  entier non nul, justifier qu'il existe un unique  $x_n > 0$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer la convergence de la suite  $(x_n)_n$  vers une limite  $\ell$  à préciser.
3. Déterminer un équivalent simple de  $x_n - \ell$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

**Corrigé :** 1. On a  $f_n$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de telles fonctions avec  $f_n(0) = -1$  et  $f_n(1) \geq 1$ . Ainsi, d'après le théorème de la bijection continue

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists ! x_n > 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0}$$

2. À  $x$  fixé dans  $]0; +\infty[$ , on a  $(f_n(x))_n$  strictement croissante. En particulier pour  $n$  entier non nul

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n) < f_{n+1}(x_n)$$

Par croissance stricte de  $f_{n+1}$ , il s'ensuit  $x_{n+1} < x_n$ . Ainsi, la suite  $(x_n)_n$  est décroissante minorée et donc converge vers une limite  $\ell$  d'après le théorème de limite monotone. On a  $f_2(1) > 1$  d'où  $x_2 < 1$  et par décroissance

$$\forall n \geq 2 \quad x_n \leq x_2 < 1$$

On note  $\alpha = x_2$  pour la suite. On reconnaît dans l'expression de  $f_n$  la somme partielle de la série entière de  $x \mapsto -\ln(1-x)$  de rayon de convergence égal à 1 d'où

$$\forall x \in [0; 1[ \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = -\ln(1-x) - 1$$

Pour une série entière, on a convergence normale sur tout segment dans l'intervalle de convergence d'où

$$\|f_n - f\|_{\infty, [0; \alpha]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par continuité de  $f$  en  $\ell$ , on obtient

$$|f(\ell)| = |f_n(x_n) - f(\ell)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)| \leq \|f - f_n\|_{\infty, [0; \alpha]} + o(1)$$

d'où

$$f(\ell) = 0 \iff -\ln(1-\ell) - 1 = 0$$

Ainsi

$$\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell = 1 - e^{-1}}$$

**Variante :** On peut aussi considérer la série  $\sum g_k(n)$  avec  $g_k(n) = \frac{x_n^k}{k} \mathbf{1}_{k \leq n}$  et procéder par double limite.

3. Remarquons en premier lieu que la suite  $(x_n)_n$  décroît strictement d'où  $x_n > \ell$  pour tout  $n$  entier non nul. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à  $f_n$  sur  $[\ell; x_n]$ , on dispose de  $c_n \in ]\ell; x_n[$  tel que

$$f_n(x_n) - f_n(\ell) = f'_n(c_n)(x_n - \ell)$$

C'est-à-dire

$$-f_n(\ell) = f'_n(c_n)(x_n - \ell)$$

Par encadrement

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Puis, la dérivée  $f'_n$  est une somme partielle de série entière donc normalement convergente sur  $[0; \alpha]$  d'où

$$\|f'_n - f'\|_{\infty, [0; \alpha]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi  $|f'_n(c_n) - f'(\ell)| \leq |f'_n(c_n) - f'(c_n)| + |f'(c_n) - f'(\ell)| = o(1)$

Comme  $f'(\ell) \neq 0$  et  $f_n(\ell) \neq 0$  (puisque  $\ell < x_n$ ), il s'ensuit

$$x_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{f_n(\ell)}{f'_n(c_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{f_n(\ell)}{f'(\ell)}$$

Pour  $x \in [0; 1[$ , on a

$$f_n(x) = f(x) + f_n(x) - f(x) = f(x) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \implies f_n(\ell) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ell^k}{k}$$

d'où 
$$-\frac{n}{\ell^n} f_n(\ell) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ell^{k-n}}{\frac{k}{n}}$$

Après changement d'indice, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{n}{\ell^n} f_n(\ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ell^k}{1 + \frac{k}{n}}$$

D'après le théorème de double limite, la convergence normale ayant lieu, il vient

$$-\frac{n}{\ell^n} f_n(\ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ell^k}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \ell^k = \frac{\ell}{1 - \ell}$$

On conclut

$$\boxed{x_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell^{n+1}}{n(1 - \ell)f'(\ell)}}$$

## Exercice 13 (Centrale 2017)

Soit  $n$  entier non nul.

1. Soit  $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . On pose  $J_r = \text{diag}(I_r, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Déterminer la comatrice  $\text{Com}(J_r)$ .
2. Montrer  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$
3. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Calculer  $\text{rg}(\text{Com}(M))$  en fonction de  $\text{rg}(M)$ .
4. Montrer que  $M \mapsto \text{Com}(M)$  réalise une surjection de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  sur  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .  
Déterminer  $\text{Com}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ .
5. Mener une étude analogue en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ .

**Corrigé :** 1. Pour  $r \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$ , toute matrice extraite de  $J_r$  par suppression d'une ligne et d'une colonne possède au moins une colonne nulle d'où la nullité de  $\text{Com}(J_r)$ . Si  $r = n$ , avec la relation  $M \text{Com}(M)^\top = \det(M) I_n$ , il est immédiat que  $\text{Com}(J_n) = \text{Com}(I_n) = I_n$ . Si  $r = n-1$ , il y a un unique cofacteur non nul, celui obtenu par suppression de la dernière ligne et dernière colonne. On conclut

$$\boxed{\forall r \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket \quad \text{Com}(J_r) = 0 \quad \text{Com}(J_{n-1}) = E_{n,n} \quad \text{Com}(J_n) = I_n}$$

**Remarque :** Notant  $J_{r,\alpha} = \text{diag}(I_r, I_{n-r}/\alpha)$  pour  $\alpha$  scalaire non nul, on a  $J_{r,p} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $J_{r,p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} J_r$ . Avec les relations

$$J_{r,p} \text{Com}(J_{r,p})^\top = \det(J_{r,p}) I_n = p^{r-n} I_n \quad \text{et} \quad J_{r,p} J_{r,1/p} = I_n$$

On obtient

$$\text{Com}(J_{r,p}) = p^{r-n} J_{r,1/p}$$

L'application  $M \mapsto \text{Com}(M)$  étant continue puisque le déterminant l'est (polynomial en les coefficients de la matrice), il s'ensuit

$$\text{Com}(J_{r,p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \text{Com}(J_r)$$

On retrouve alors le résultat précédent.

2. On a  $\forall M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(M) = \det(M) (M^\top)^{-1}$

Par suite  $\forall (A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})^2 \quad \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)$

Par densité de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui implique la densité de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})^2$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  et continuité de  $M \mapsto \text{Com}(M)$  et du produit matriciel, on conclut

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{Com}(AB) = \text{Com}(A) \text{Com}(B)}$$

3. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Il existe  $P, Q$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$  tels que  $M = PJ_rQ$ . D'après le résultat précédemment établi, on a

$$\text{Com}(M) = \text{Com}(P) \text{Com}(J_r) \text{Com}(Q)$$

d'où  $\text{rg}(\text{Com}(M)) = \text{rg}(\text{Com}(J_r))$

Avec le résultat de la première question, on conclut

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{rg}(\text{Com}(M)) = \begin{cases} n & \text{si } \text{rg}(M) = n \\ 1 & \text{si } \text{rg}(M) = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

4. On a vu précédemment

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \text{Com}(M) = \det(M) (M^\top)^{-1}$$

On a clairement  $\text{Com}(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$ . Cherchons une application réciproque de  $\text{Com}$ . Soit  $N \in GL_n(\mathbb{C})$  et considérons l'équation  $N = \text{Com}(M)$  d'inconnue  $M \in GL_n(\mathbb{C})$ . On a

$$N = \text{Com}(M) \iff N = \det(M) (M^\top)^{-1} \implies \det(N) = \det(M)^{n-1}$$

Notant  $\zeta$  une racine  $n - 1$ -ième de  $\det(N)$ , choisissant  $M = \zeta (N^\top)^{-1}$ , on a

$$\text{Com}(M) = \det(\zeta (N^\top)^{-1}) \zeta^{-1} N = \zeta^n \det(N^{-1}) \zeta^{-1} N = \det(N) \det(N^{-1}) N = N$$

Ainsi  $L$ 'application  $M \mapsto \text{Com}(M)$  est une surjection de  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $GL_n(\mathbb{C})$ .

**Remarque :** Ce n'est pas une injection puisqu'on dispose de  $n - 1$  choix distincts pour la racine  $n - 1$ -ième de  $\det(N)$ .

On a clairement  $0 \in \text{Com}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$  puisque  $\text{Com}(0) = 0$ . Si  $\text{rg}(M) = n - 1$ , on sait que  $\text{rg}(\text{Com}(M)) = 1$ . Réciproquement, considérons  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $\text{rg}(N) = 1$ . Il existe  $P, Q$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  telles que  $N = PE_{n,n}Q$ . D'après la surjectivité sur  $GL_n(\mathbb{C})$ , il existe  $R, S$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$  telles que  $P = \text{Com}(R)$ ,  $Q = \text{Com}(S)$ . Ainsi, on a

$$N = P \text{Com}(J_{n-1}) Q = \text{Com}(R) \text{Com}(J_{n-1}) \text{Com}(S)$$

D'après le résultat de la deuxième question, on trouve

$$\boxed{N = \text{Com}(RJ_{n-1}S)}$$

On conclut  $\text{Com}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{rg}(M) = 1\} \cup GL_n(\mathbb{C})$

5. Soit  $N \in GL_n(\mathbb{R})$  et considérons l'équation  $N = \text{Com}(M)$  d'inconnue  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Comme dans le cas complexe, on a

$$N = \text{Com}(M) \implies \det(N) = \det(M)^{n-1}$$

En revanche, dans  $\mathbb{R}$ , cette équation n'a pas systématiquement de solutions. Si  $n - 1$  impair, on choisit  $\zeta = \sqrt[n-1]{\det(N)}$ . Si  $n - 1$  pair, on a  $\det(M)^{n-1} > 0$  pour  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . Cette équation admet une solution si et seulement si  $\det(N) > 0$ . Dans ce cas, on pose  $\zeta = \det(N)^{\frac{1}{n-1}}$ . On choisit ensuite  $M = \zeta (N^\top)^{-1}$  et on vérifie comme dans le cas complexe que  $\text{Com}(M) = N$ . Ainsi, notant  $GL_n^+(\mathbb{R})$  les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de déterminant strictement positif, on a

$$\boxed{\text{Com}(GL_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) & \text{si } n \text{ pair} \\ GL_n^+(\mathbb{R}) & \text{sinon} \end{cases}}$$

On a clairement  $0 \in \text{Com}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  puisque  $\text{Com}(0) = 0$ . Si  $\text{rg}(M) = n - 1$ , on sait que  $\text{rg}(\text{Com}(M)) = 1$ . Réciproquement, considérons  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{rg}(N) = 1$ . Il existe  $P, Q$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $N = PE_{n,n}Q$ . On observe  $\text{diag}(-1, I_{n-1})E_{n,n} = E_{n,n} = E_{n,n} \text{diag}(-1, I_{n-1})$ . Quitte à remplacer  $P$  par  $P \text{diag}(-1, I_{n-1})$  et  $Q$  par  $\text{diag}(-1, I_{n-1})Q$ , on peut choisir  $P$  et  $Q$  dans  $GL_n^+(\mathbb{R})$ . Quelque soit la parité de  $n$ , on dispose de  $R, S$  dans  $GL_n(\mathbb{R})$  telles que  $P = \text{Com}(R)$ ,  $Q = \text{Com}(S)$ . Ainsi, on a

$$N = \text{Com}(J_{n-1})Q = \text{Com}(R) \text{Com}(J_{n-1}) \text{Com}(S)$$

D'après le résultat de la deuxième question, on trouve

$$\boxed{N = \text{Com}(RJ_{n-1}S)}$$

On conclut  $\boxed{\text{Com}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{0\} \cup \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(M) = 1\} \cup \text{Com GL}_n(\mathbb{R})}$

**Remarque :** Si  $n - 1$  est impair, l'application  $u \mapsto u^{n-1}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dont la réciproque est notée  $v \mapsto \sqrt[n-1]{v}$ , définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier alors que l'application  $x \mapsto x^{\frac{1}{n-1}}$  est seulement définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

## Exercice 14 (Mines-Telecom 2023)

On considère la suite de fonctions  $(u_n)_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u_0 = \text{id}$  et  $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$  pour  $n$  entier.

1. Étudier la convergence simple de  $(u_n)_n$ .
2. La convergence est-elle uniforme ?

**Corrigé :** 1. On pose  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) + x$

On va réduire le domaine d'étude pour déterminer le comportement de  $(u_n)_n$ . On vérifie par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad u_n(-x) = -u_n(x) \quad u_n(x + 2\pi) = u_n(x) + 2\pi$$

En effet, l'initialisation est vraie et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x) \quad f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$$

d'où l'hérédité. Il suffit donc d'étudier le comportement de  $u_n(x)$  pour  $x \in [0; \pi]$ . Par imparité, on en déduit le comportement sur  $[-\pi; 0]$  et par translation, on en déduit le comportement sur tout intervalle translaté de la forme  $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a

$$\forall x \in [0; \pi] \quad f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$$

d'où la croissance de  $f$  sur  $[0; \pi]$  avec  $f([0; \pi]) \subset [0; \pi]$ . On a également

$$\forall x \in [0; \pi] \quad f(x) - x = \sin(x) \geq 0$$

On en déduit que pour  $x \in [0; \pi]$ , la suite  $(u_n(x))_n$  qui vérifie  $u_{n+1}(x) = f(u_n(x))$  pour  $n$  entier est à valeurs dans  $[0; \pi]$  et croissante. Par limite monotone, elle converge vers un point fixe de la fonction continue  $f$  et on a pour  $t \in [0; \pi]$

$$f(t) = t \iff \sin(t) = 0 \iff t \in [0; \pi]$$

On a  $u_n(0) = 0$  pour tout  $n$  entier par imparité. Pour  $x \in ]0; \pi]$ , comme la suite  $(u_n(x))_n$  croît avec  $u_0(x) = x > 0$ , on en déduit que  $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi$ . On conclut

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CS}} u \quad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = \begin{cases} (2k+1)\pi & \text{si } x \in ]2k\pi; 2(k+1)\pi[ \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

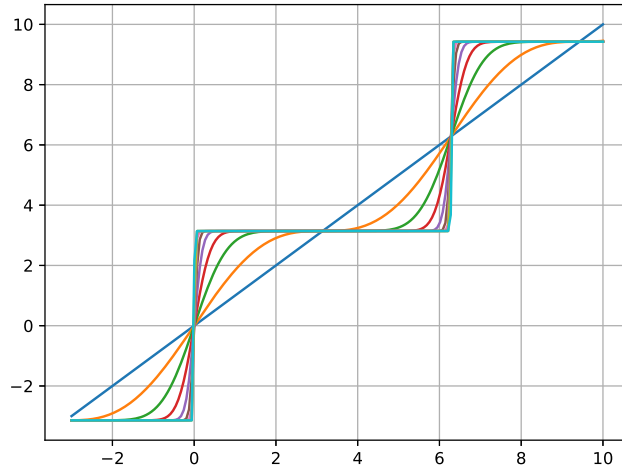


FIGURE 2 – Tracé de la suite de fonctions  $(u_n)_n$

2. Par récurrence, on vérifie que la suite  $(u_n)_n$  est une suite de fonctions continues puisque  $u_{n+1} = f \circ u_n$  continue par composition si  $u_n$  l'est. Si la suite  $(u_n)_n$  converge uniformément, alors sa limite uniforme est continue ce qui n'est pas le cas. On conclut

$$u_n \not\stackrel{\text{CU}}{\underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow}} u$$

Par récurrence, on montre que les fonctions  $u_n$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}$ . L'initialisation est vraie avec  $u_0 = \text{id}$  et pour  $x \leq y$ , si  $u_n(x) \leq u_n(y)$  avec  $n$  entier fixé, alors il vient

$$f(u_n(y)) = u_{n+1}(x) \leq u_{n+1}(y) = f(u_n(y))$$

ce qui prouve l'hérédité. Soit  $a \in ]0; \pi]$ . Pour  $x \in ]0; \pi]$ , on sait que  $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi$  et comme la suite  $(u_n(x))_n$  croît, elle tend vers  $\pi$  par valeurs inférieures. Ainsi, pour  $n$  entier, on a

$$\|u_n - u\|_{\infty, [a; \pi]} = \sup_{x \in [a; \pi]} |u_n(x) - \pi| = \pi - u_n(a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Avec l'imparité des  $u_n$  et la propriété  $u_n(\cdot + 2\pi) = u_n + 2\pi$ , on conclut

La suite  $(u_n)_n$  converge uniformément sur tout segment de  $\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi; 2(k+1)\pi[.$

## Exercice 15 (Mines-Telecom 2023)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. On suppose  $A^2 + A + I_n = 0$ . Montrer que l'entier  $n$  est pair.
2. On suppose  $A^3 + A^2 + A = 0$ . Montrer que  $\text{rg}(A)$  est pair.

**Corrigé :** 1. On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ . Le polynôme  $P = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$  est annulateur de  $A$ . Si l'entier  $n$  est impair, alors on a pour  $x$  réel

$$\chi_A(x) = x^n + o(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$$

et comme l'application polynomiale  $x \mapsto \chi_A(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle admet une racine. Or, les valeurs propres de  $A$ , c'est-à-dire les racines de  $\chi_A$  sont contenues dans  $P^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}$  qui est vide. On conclut

L'entier  $n$  est pair.

2. On note  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  canoniquement associé à  $A$ . L'image  $\text{Im } u$  est stable par  $u$  et on note  $v = u_{\text{Im } u}$  l'induit par  $u$  sur  $\text{Im } u$ . Soit  $x \in \text{Im } u$ . On dispose de  $t \in E$  tel que  $x = u(t)$  et il vient

$$(v^2 + v + \text{id})(x) = (u^2 + u + \text{id})(u(t)) = (u^3 + u^2 + u)(t) = 0_E$$

On applique alors le résultat de la première question à l'endomorphisme  $v$  et on conclut

L'entier  $\text{rg}(u) = \text{rg}(A)$  est pair.

**Variante :** Le polynôme  $X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$  est annulateur de  $A$ , scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ . Par conséquent, il existe  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(0 \times I_{m_0}, j \times I_{m_j}, \bar{j} \times I_{m_{\bar{j}}})$$

avec  $m_j = m_{\bar{j}}$  puisque les racines complexes conjuguées du polynôme réel  $\chi_A$  ont même multiplicité. On en déduit

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(D) = m_j + m_{\bar{j}} = 2m_j$$

et on conclut comme précédemment.

## Exercice 16 (CCINP 2019)

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$  tel que  $u^3 + u = 0$  et  $A$  la matrice canonique de  $u$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

2. Déterminer le rang de  $u$ .

3. Montrer 
$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

4. Établir 
$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + \text{id})$$

5. Montrer 
$$\text{Im } u = \text{Ker } (u^2 + \text{id})$$

6. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Corrigé :** 1. Le polynôme  $P = X^3 + X = X(X - i)(X + i)$  est annulateur de  $u$  et donc de  $A$ . Comme  $P$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , on en déduit

La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

2. Si le spectre complexe de  $A$  est réduit à  $\{0\}$ , alors la matrice  $A$  est nulle ce qui est faux. Par conséquent, le spectre complexe de  $A$  est non réduit à  $\{0\}$  et comme  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ , les racines complexes de  $\chi_A$  sont conjuguées de même multiplicité. Comme  $\deg \chi_A = 3$ , on en déduit  $\chi_A = P$  d'où  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$  et la matrice  $A$  est donc semblable dans  $\mathbb{C}$  à  $\text{diag}(0, i, -i)$ . Ainsi

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 2$$

**Variante :** On peut aussi, par imparité de  $\chi_A$  et invocation du théorème des valeurs intermédiaires, annoncer que le polynôme  $\chi_A$  admet une racine réelle qui est nécessairement 0 et comme il en admet d'autres qui sont par conséquent complexes et conjuguées, alors  $\chi_A = P$ .

3. Soit  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$ . On dispose de  $t \in E$  tel que  $x = u(t)$  et  $u(x) = u^2(t) = 0$  puis

$$x = u(t) = -u^3(t) = -u(u^2(t)) = 0$$

ce qui prouve  $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0\}$ . Le théorème du rang donne  $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$  d'où

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

4. Le polynôme  $P = X(X^2 + 1)$  est annulateur de  $u$  et  $X \wedge (X^2 + 1) = 1$ . D'après le théorème des noyaux, il vient

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker } P(u) = \text{Ker } u \oplus \text{Ker } (u^2 + \text{id})$$

5. On a 
$$(u^2 + \text{id}) \circ u = u^3 + u = 0$$

d'où  $\text{Im } u \subset \text{Ker } (u^2 + \text{id})$ . D'après les égalités établies aux deux questions précédentes, il vient  $\text{rg } u = \dim \text{Ker } (u^2 + \text{id})$  et on conclut

$$\text{Im } u = \text{Ker } (u^2 + \text{id})$$

**Variante :** Pour l'autre inclusion, on peut procéder sans argument dimensionnel. Soit  $x \in \text{Ker } (u^2 + \text{id})$ . On a  $x = -u^2(x) = u(-u(x)) \in \text{Im } u$  d'où  $\text{Ker } (u^2 + \text{id}) \subset \text{Im } u$ .

6. Le sev  $\text{Ker } (u^2 + \text{id})$  est stable par  $u$  puisque  $u$  et  $u^2 + \text{id}$  commutent et on note  $v = u_{\text{Ker } (u^2 + \text{id})}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $\text{Ker } (u^2 + \text{id})$ . Soit  $x \in \text{Ker } (u^2 + \text{id}) \setminus \{0\}$ . Montrons que

$(x, v(x))$  est une base de  $\text{Ker}(u^2 + \text{id})$ . Soit  $\alpha, \beta$  réels tels que  $\alpha x + \beta v(x) = 0_{\mathbb{E}}$ . On applique  $v$  et comme  $v^2 + \text{id} = 0$ , on obtient donc

$$\begin{cases} \alpha x + \beta v(x) = 0_{\mathbb{E}} \\ -\beta x + \alpha v(x) = 0_{\mathbb{E}} \end{cases}$$

Avec  $\alpha L_1 - \beta L_2$ , on obtient  $(\alpha^2 + \beta^2)x = 0_{\mathbb{E}}$  d'où  $\alpha = \beta = 0$  ce qui prouve la liberté de  $(x, v(x))$ . Par ailleurs, on a  $\dim \text{Ker}(u^2 + \text{id}) = \text{rg } u = 2$  et ceci établit que la famille  $(x, v(x))$  est une base de  $\text{Ker}(u^2 + \text{id})$ . En complétant celle-ci par une base du noyau qui est un supplémentaire de  $\text{Ker}(u^2 + \text{id})$ , on conclut

Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
--

## Exercice 17 (Centrale 2021)

- Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.
- Soit  $(u_n)_n$  suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{n+m} \leq u_n + u_m$$

Montrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers le réel  $L = \inf \left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

- Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  pour  $n \geq 1$ . Soit  $a > 0$  tel que  $\mathbb{P}(X_1 \geq a) > 0$ . Montrer que la suite  $\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))\right)_{n \geq 1}$  est convergente.

**Corrigé :** 1. Soit  $X$  variable aléatoire réelle d'espérance finie et  $\varepsilon > 0$ . On a les inégalités

$$X \geq X \mathbf{1}_{\{X \geq \varepsilon\}} \geq \varepsilon \mathbf{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}$$

la première résultant de la positivité de  $X$ . Par croissance et linéarité de l'espérance, il s'ensuit

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}) \geq \mathbb{E}(\varepsilon \mathbf{1}_{\{X \geq \varepsilon\}}) = \varepsilon \mathbb{P}(X \geq \varepsilon)$$

d'où 
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Puis, on suppose  $X$  variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre deux. On a  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  d'espérance finie et on applique l'inégalité de Markov en remarquant par croissance stricte de  $u \mapsto u^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  l'égalité pour  $\varepsilon > 0$

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\}$$

Il vient

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

2. L'ensemble  $\left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , minorée (par zéro) et admet donc une borne inférieure finie  $L$ . Soient  $m, q$  et  $r$  des entiers et  $n = mq + r$ . Pour  $k$  entier, on a

$$u_{(k+1)m+r} \leq u_m + u_{km+r}$$

et par récurrence 
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{km+r} \leq k u_m + u_r$$

d'où 
$$u_n = u_{qm+r} \leq q u_m + u_r$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par caractérisation de la borne inférieure  $L$ , on dispose de  $m \geq 1$  tel que  $L \leq \frac{u_m}{m} \leq L + \varepsilon$ . On fait la division euclidienne de  $n$  par  $m$  avec  $n = qm + r$  et  $r \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$ . Il vient

$$L \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_m}{m} \frac{qm}{n} + \frac{u_r}{n} \leq (L + \varepsilon) \frac{qm}{n} + \frac{M}{n} \leq (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{M}{n}$$

où  $M = \max_{0 \leq k \leq m-1} u_k$ . On a  $\frac{r}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  puisque  $r = O(1)$  (le reste  $r$  dépend *a priori* de  $n$  mais est borné) et pour  $n$  assez grand, on obtient

$$L \leq \frac{u_n}{n} \leq L + 2\varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L}$$

3. Soient  $m$  et  $n$  des entiers non nuls. On a

$$\{S_{m+n} - S_n \geq na\} \cap \{S_m \geq ma\} \subset \{S_{m+n} \geq (n+m)a\}$$

puis

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_n \geq na, S_m \geq ma) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)a)$$

Or, les variables  $S_{m+n} - S_m = \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$  et  $S_m = \sum_{k=1}^m X_k$  sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(S_{m+n} - S_m \geq na) \mathbb{P}(S_m \geq ma) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)a)$$

et en observant que  $S_{m+n} - S_m$  et  $S_n$  ont même loi comme somme de  $m$  variables aléatoires indépendantes de même loi, on trouve

$$\mathbb{P}(S_n \geq na) \mathbb{P}(S_m \geq ma) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)a)$$

Par ailleurs, on a  $\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq a\} \subset \{S_n \geq na\}$  d'où

$$0 \leq \mathbb{P}(X_1 \geq a)^n \leq \mathbb{P}(S_n \geq na)$$

Passant au logarithme, on obtient que la suite  $(-\ln(\mathbb{P}(S_n \geq na)))_n$  est à valeurs positives et sous-additive. D'après le résultat de la question précédente, on conclut

La suite $\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))\right)_{n \geq 1}$ est convergente.
--

**Remarque :** Il s'agit d'un résultat de *grandes déviations*.