IMT - BEOS 8893

Exercice 1

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $||A||^2$ est égal à la somme des carrés des valeurs propres de A.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que le graphe de f admet un point de symétrie.
2. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

IMT - BEOS 8904

Exercice 1

1. Décomposer X^4+1 en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ en remarquant que $X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2$.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X^4+1}$.
3. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exercice 2

Résoudre l'équation matricielle suivante d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M(M^T M)^2 = I_n.$$

Centrale - BEOS 6233

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs tels que : $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $a_{i,j}a_{j,i} = 1$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. On suppose que A n'est pas inversible. Etudier la réduction de A.
3. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.
   Montrer que, dans cette condition, A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. L'est-elle dans $\mathbb{C}$?

Centrale -BEOS 8653

1. Montrer que les parties connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Soit E un espace vectoriel normé et Ω une partie de E. On dit que Ω vérifie la propriété $\mathcal{C}$ lorsque toute fonction continue $f : \Omega \to \{0,1\}$ est constante.

2. Montrer que si Ω est connexe par arc, alors Ω vérifie $\mathcal{C}$.
3. Soit
$$\Omega = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \in \mathbb{R}_+^* \right\} \cup \{0\} \times [-1,1].$$
   (a) Montrer que Ω vérifie $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que Ω n'est pas connexe par arc.

Mines - BEOS 8748

Exercice 1

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que R, rayon de convergence de f, est supérieur ou égal à 1.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$.
3. Montrer que $R = 1$.