ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral python - Feuille n°1

Exercice 1 (Centrale 2019)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+x} - 1$.

1. (a) Tracer le graphe de f_n pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$.
   (b) Déterminer des valeurs approchées de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$.
   (c) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie la matrice A_n.
   (d) Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer la conjecture précédente.
3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]-1 ; +\infty[$ puis montrer que celle-ci est supérieure à n à partir d'un certain rang.
5. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$.
6. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de λ_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
f=lambda n,x:sum([k/(k+x) for k in range(1,n+1)])-1
tx=np.linspace(0,40,1000)
for n in range(3,9):
    tf=[f(n,x) for x in tx]
    plt.plot(tx,tf)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

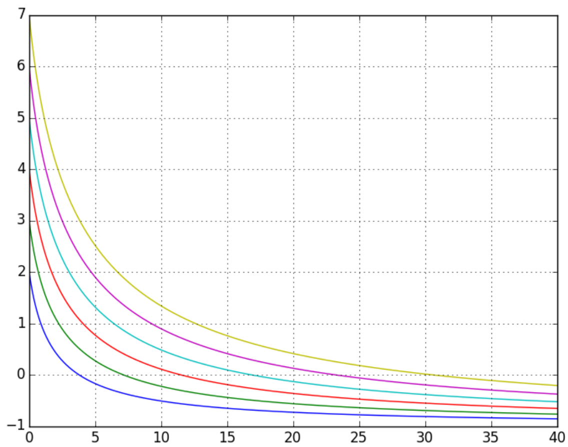

FIGURE 1 – Tracé des graphes de f_n pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$

1.(b) On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:f(n,x),0)[0]

for n in range(3,9):
    print("x(",n,")=",x(n))
```

On obtient :

```
x( 3 )= 3.76643548385
x( 4 )= 7.10619620421
x( 5 )= 11.4423101591
x( 6 )= 16.7770281674
x( 7 )= 23.1111133504
x( 8 )= 30.4448774786
```

1.(c) On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            res[i,j]=j+1
        res[j,j]=0
    return res
```

1.(d) On saisit :

```
n= 3
sp= [ 3.76643548 -1.28282386 -2.48361162]

n= 4
sp= [ 7.1061962  -1.21448662 -3.52502525 -2.36668434]
...
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$

2. Soit n entier non nul. Avec les opérations $\mathrm{L}_k \leftarrow \mathrm{L}_k - \mathrm{L}_1$ pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, notant χ_n le polynôme caractéristique de A_n, on obtient

$$\chi_n = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -2 & \dots & \dots & -n \\ -1-\mathrm{X} & \mathrm{X}+2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ -1-\mathrm{X} & 0 & \dots & 0 & \mathrm{X}+n \end{vmatrix}$$

En considérant $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{k}{x+k}\mathrm{L}_k$, on obtient

$$\chi_n(x) = \left[x - (x+1)\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{x+k}\right]\prod_{k=2}^{n}(x+k)$$

D'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = -f_n(x)\prod_{k=1}^{n}(x+k)}$$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ avec $f_n(0) = n-1 > 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$. La fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-1\,;n-1]$ d'où l'existence et unicité d'une racine de f_n sur $\mathbb{R}_+$. D'après la relation obtenue entre χ_n et f_n, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}_n) = f_n^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+}$$

3. Soit n entier non nul. D'après la relation précédemment obtenue, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \qquad \chi_n(x) = 0 \iff f_n(x) = 0$$

Une étude de fonction montre que f_n décroît strictement avec $f_n(x) \xrightarrow[x\to-k^+]{} +\infty$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to-k^-]{} -\infty$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$. On en déduit que f_n s'annule exactement une fois sur chaque intervalle $]-k\,;-(k-1)[$ pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, exactement une fois sur $]-1\,;+\infty[$ et pas sur $]-\infty\,;-n[$. Ainsi, la fonction f_n admet n racines distinctes sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ qui sont également racines de χ_n. Comme χ_n est un polynôme de degré n, les racines de f_n sont toutes les racines de χ_n. Par condition suffisante, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, la matrice } \mathrm{A}_n \text{ est diagonalisable.}}$$

4. Soit n entier non nul. L'étude de fonction montre que f_n admet une unique racine sur $]-1\,;+\infty[$. Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ admet une unique valeur propre } \lambda_n \in\,]-1\,;+\infty[.}$$

On a
$$f_n(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n} - 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n} - 1 = \frac{n+1}{4} - 1$$

D'où
$$f_n(n) \geqslant 0 \iff n \geqslant 3$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \geqslant 3 \qquad \lambda_n \geqslant n}$$

5. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+\lambda_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\lambda_n} \iff \frac{n(n+1)}{2(\lambda_n+n)} \leqslant 1 \leqslant \frac{n(n+1)}{2\lambda_n}$$

d'où
$$\frac{n(n+1)}{2} - n \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

On en déduit
$$\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}}$$

Remarque : On a
$$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant n \iff n \geqslant 3$$

La minoration obtenue est donc meilleure que celle établie à la question précédente.

6. Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+\lambda_n} = 1 \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\lambda_n}\left(1+\frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} = 1$$

On a $$(1+u)^{-1} \underset{u\to 0}{=} 1-u+\mathrm{o}(u) = 1-u+u\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on obtient
$$\left(1+\frac{k}{\lambda_n}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} 1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k}{\lambda_n}\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right) \quad \text{avec} \quad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,]\,0\,;\frac{n}{\lambda_n}\,]} = \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $$\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} k - (1+\mathrm{o}(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\lambda_n}$$

d'où $$\lambda_n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\left(\frac{2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{n^3}{3}+\mathrm{o}(n^3)\right)(1+\mathrm{o}(1)) = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{2}{3}n+\mathrm{o}(n)$$

On conclut $$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}$$

Remarque : Avec du courage et du temps, on peut améliorer la précision du développement asymptotique. On a $(1+u)^{-1} = 1-u+u^2+u^2\varepsilon(u)$ puis
$$\begin{aligned}\lambda_n &= \sum_{k=1}^{n} k\left[1-\frac{k}{\lambda_n}+\frac{k^2}{\lambda_n^2}\left(1+\varepsilon\left(\frac{k^2}{\lambda_n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{6}+\mathrm{o}(n)}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\underbrace{\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}(1+\mathrm{o}(1))\end{aligned}$$

On obtient $$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}-\frac{2}{9}+\mathrm{o}(1)}$$

On saisit :

```
tn=range(1,100)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx);plt.grid();plt.show()
tn=range(100,200)
tx=[x(n) for n in tn]
print("\nRégression parabolique=",np.polyfit(tn,tx,2))
```

On observe :

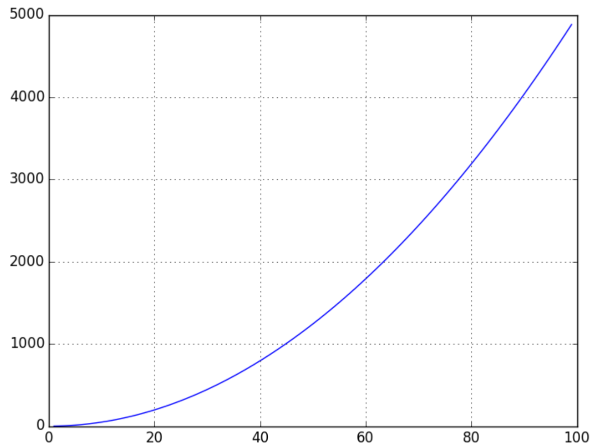

FIGURE 2 – Tracé de $(\lambda_n)_n$

et on obtient :

```
Régression parabolique= [ 0.50000001 -0.16667039 -0.22166145]
```

Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_n l'ensemble des matrices de E n'ayant pas de valeur propre réelle négative. On pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad f(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \int_0^1 (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur P_n.
2. Écrire une fonction `exp(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une somme partielle de 100 termes de l'exponentielle de matrice.
3. Écrire une fonction `f(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une approximation de $f(\mathrm{A})$ par la méthode des rectangles.
4. Pour une matrice `A` aléatoire de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, afficher `A`, `f(exp(A))` et `exp(f(A))`. Que peut-on conjecturer ?
5. Montrer que l'application définie sur E par $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sous-multiplicative.
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$.
   (b) Écrire $f(\mathrm{A})$ comme la somme d'une série.
   (c) Établir $\qquad \exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$

Corrigé : 1. Pour $t \in \,]\,0\,;1\,]$, on a

$$t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n = t\left(\mathrm{A} - \left(1 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{I}_n\right) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{t} \leqslant 0$$

Comme $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$, alors $1 - \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ ce qui prouve l'inversibilité de $\mathrm{A} - \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)\mathrm{I}_n$. Si $t = 0$, l'inversibilité est triviale. Puis, l'application $t \mapsto t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n$ est à coordonnées polynomiales et l'application inverse sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{M}^{-1} = (\det \mathrm{M})^{-1} (\mathrm{Com}\,\mathrm{M})^\top$$

est à coordonnées rationnelles bien définies. Par composition, l'intégrande $t \mapsto (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1}$ est à coordonnées rationnelles bien définies donc continue sur $[\,0\,;1\,]$ ce qui prouve que son intégrale est bien définie et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathrm{P}_n.}$$

2. On saisit :

```
def exp(A):
    res=0
    n=len(A)
    Ak=np.eye(n)
    ifk=1
    N=100
```

```
    for k in range(100):
        res+=Ak*ifk
        ifk*=1/(k+1)
        Ak=np.dot(Ak,A)
    return res
```

Remarque : Si on code un calcul de factorielle de type `int`, on a un message d'erreur lorsque la factorielle devient trop grande par incompatibilité de traitement avec le format flottant.

3. On saisit :

```
def f(A):
    res=0
    N=100
    n=len(A)
    In=np.eye(n)
    res=0
    for k in range(N):
        res+=alg.inv(k/N*(A-In)+In)
    res/=N
    return np.dot(A-In,res)
```

4. On obtient :

```
A=
[[0.39761672 0.35770479 0.11385846 0.2111241  0.13398998]
 [0.91653384 0.1626058  0.17657528 0.48891956 0.95765927]
 [0.09021453 0.95993874 0.24685814 0.98330557 0.02363415]
 [0.64953687 0.38009316 0.57009138 0.60737646 0.28604754]
 [0.59634937 0.30129783 0.46153225 0.51834649 0.64516309]]

f(exp(A))=
[[0.40272873 0.36100714 0.11635174 0.2154573  0.13785001]
 [0.92704995 0.17011338 0.18304863 0.49840525 0.9653767 ]
 [0.10164175 0.96655484 0.25293485 0.993369   0.03234894]
 [0.65897536 0.3883511  0.57583188 0.61757771 0.29259013]
 [0.60614636 0.30931106 0.46766505 0.52851636 0.6523825 ]]

exp(f(A))=
[[0.40219007 0.35630286 0.11431563 0.21186752 0.13536147]
 [0.91450988 0.17092476 0.1792869  0.49023589 0.95334371]
 [0.09723117 0.95442847 0.25341736 0.98022297 0.02954456]
 [0.64917226 0.38208868 0.56822318 0.61329381 0.2873005 ]
 [0.59679074 0.30376354 0.46107467 0.52004301 0.64844234]]
```

On conjecture $\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad \exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}}$

Remarque : En faisant plusieurs essais, il ne semble pas raisonnable de conjecturer $f(\exp(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$. En fait, si on considère la fonction f comme un *logarithme matriciel*, il ne devrait pas avoir unicité d'un tel choix puisque par exemple

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad \exp(\mathrm{A}) = \exp\left(\mathrm{A} + \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{I}_{n-2}\right)\right)$$

5. L'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{B}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. Il en résulte que $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sur E. Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. On a $\|\mathrm{C}\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} c_{i,j}^2$. Par définition du produit matriciel et inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, il vient

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad c_{i,j}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$$

Ainsi $$\|\mathrm{C}\|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right] = \left(\sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n} b_{k,j}^2\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{M} \mapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})} \text{ est une norme sous-multiplicative sur E.}}$$

6.(a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathrm{M}) \cap \mathbb{R}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. On pose la matrice $\mathrm{M} = \big(\mathrm{X}|0|\ldots|0\big)$. On a $\mathrm{AM} = \lambda \mathrm{M}$ d'où $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M} = (\lambda - 1)\mathrm{M}$. Puis, par sous-multiplicativité de la norme, il vient

$$\|(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\mathrm{M}\| = |\lambda - 1|\, \|\mathrm{M}\| \leqslant \|\mathrm{A} - \mathrm{I}\| \|\mathrm{M}\| < \|\mathrm{M}\|$$

et comme $\mathrm{M} \neq 0_{\mathrm{E}}$, il vient $\|\mathrm{M}\| > 0$ par séparation et on en déduit $|\lambda - 1| < 1$, *i.e.* $\lambda \in]\,0\,;2\,[$.

On conclut $$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n}$$

6.(b) Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{B}\| < 1$. Une récurrence immédiate donne $\|\mathrm{B}^k\| \leqslant \|\mathrm{B}\|^k$ pour tout k entier non nul puis, en considérant les sommes partielles, on établit

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{B})\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}^k\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = \mathrm{I}_n$$

On a $$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)\| = t\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$$

En appliquant le résultat préliminaire, il vient

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

On pose $$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_k(t) = t^k (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

Les u_k sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_k\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t \in [\,0\,;1\,]} \|t^k (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\| = \|(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\| \leqslant \|\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\|^k$$

La série géométrique $\sum \|\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\|^k$ converge et on en déduit que la série de fonctions continue $\sum u_k$ converge normalement dont uniformément sur $[\,0\,;1\,]$. On intègre terme à terme et il vient

$$\int_0^1 (t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n)^{-1}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 t^k\, \mathrm{d}t\right)(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k$$

On conclut $$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1) \qquad f(\mathrm{A}) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^k}$$

Remarque : Le résultat vaut trivialement pour une matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|1-\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$.

6.(c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ avec $|z| < 1$. On note $\mathrm{I}_z = \left] -\dfrac{1}{|z|}\,;\, \dfrac{1}{|z|} \right[$ puis

$$\forall t \in \mathrm{I}_z \qquad \varphi(t) = (1-tz)\mathrm{e}^{\psi(t)} \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(tz)^k}{k}$$

et
$$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times \mathrm{I}_z \qquad v_k(t) = \frac{(tz)^k}{k}$$

Les v_k sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\sum v_k(t)$ qui converge absolument sur I_z. Par dérivation, on a $v_0' = 0$ et

$$\forall (k,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I}_z \qquad v_k'(t) = t^{k-1} z^k$$

Pour $a \left[0\,;\, \dfrac{1}{|z|} \right[$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \|v_k'\|_{\infty,[-a\,;a]} = |z|\,|az|^{k-1}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum v_k$ sur tout segment de I_z ce qui prouve la dérivabilité de la somme ψ. Enfin, pour une fonction $g = a + \mathrm{i}b : \mathrm{I}_z \to \mathbb{C}$, on a pour $t \in \mathrm{I}_z$

$$\exp(g(t)) = \exp\left(a(t) + \mathrm{i}b(t)\right) = \mathrm{e}^{a(t)}\left(\cos b(t) + \mathrm{i}\sin b(t)\right)$$

On en déduit la dérivabilité de $\exp \circ g$ sur I_z et par dérivation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp \circ g(t)\right] = g'(t) \exp \circ g(t)$$

Par suite, la fonction φ est dérivable sur I_z et on trouve par dérivation

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathrm{I}_z \qquad \varphi(t) &= -z\mathrm{e}^{\psi(t)} + (1-tz)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}z^k\right)\mathrm{e}^{\psi(t)} \\ &= -z\mathrm{e}^{\psi(t)} + (1-tz)\left(\frac{z}{1-tz}\right)\mathrm{e}^{\psi(t)} = 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur I_z et en évaluant en $t = 1$, on obtient

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,1) \qquad \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}} = \frac{1}{1-z}$$

La relation vaut trivialement pour $z = 0$. Passant à l'inverse, on trouve

$$\forall z \in \mathrm{D}(0,1) \qquad \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\right) = 1 - z$$

d'où
$$\forall z \in \mathrm{D}(1,1) \qquad \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-z)^k}{k}\right) = z$$

Supposons A diagonalisable. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ avec les λ_i complexes telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a $|\lambda_i - 1| < 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Par continuité du produit matriciel et d'après la remarque faite à la question précédente, on obtient

$$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{P}\exp(f(\mathrm{D}))\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-\lambda_i)^k}{k}\right)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}^{-1}$$

et d'après le résultat précédemment établi, on obtient

$$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}$$

Enfin, on peut vérifier que les matrices diagonalisables forment une partie dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et l'intersection de cet ensemble avec $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1)$ constitue donc une partie dense de $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1)$. On montre sans difficulté la continuité de f sur $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1)$ par convergence normale et donc uniforme sur tout compact de $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n, 1)$ de la série de fonctions continues définissant f et on conclut enfin

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad \exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}}$$

Exercice 3 (Centrale 2022)

Pour p et n entiers, on note $\mathrm{S}_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ et

$$\sigma_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}\binom{n}{k}k^p$$

Par convention, on pose $[\![1\,;\, 0]\!] = \varnothing$ et $\mathrm{S}_{0,0} = 1$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\, r]\!]$ avec $r \geqslant 1$. On définit

$$\mathrm{T}_r = \inf\{n \geqslant 1 \mid \text{ Card }\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} = r\}$$

Pour n entier, on pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$

1. Pour p et n entiers avec $p \leqslant n$, préciser $\mathrm{S}_{p,n}$.
2. Soit n entier. Déterminer un développement limité en zéro à l'ordre n de f_n.
3. Pour n entier, à l'aide de l'unicité du développement limité, en déduire la valeur de $\sigma_{n,n}$ et comparer cette valeur avec $\mathrm{S}_{n,n}$.
   Pour la suite, on admet que $\mathrm{S}_{p,n} = \sigma_{p,n}$ pour tous p et n entiers.
4. Montrer $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = 1 - \dfrac{\mathrm{S}_{p,r}}{r^p}$
5. Écrire une fonction `S(p,n)` qui renvoie $\mathrm{S}_{p,n}$ et une fonction `PT(r,p)` qui renvoie $\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p)$.
6. Soit t réel. Établir $\qquad \mathbb{P}\left(\dfrac{\mathrm{T}_r - r\ln r}{r} > t\right) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r})$

   avec $p_{t,r}$ un entier fonction de t et r que l'on précisera.
7. Pour $r \in \{5, 8, 11, 14\}$, représenter sur $[\, \lfloor \ln r \rfloor + 1\,;\, r\,]$ les graphes de $t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r})$ et $t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}$. Que peut-on conjecturer ?
8. Montrer $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = -\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\left(1 - \dfrac{k}{r}\right)^p$
9. Pour t réel et k entier, montrer

$$\binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-tk}}{k!}$$

10. Conclure en démontrant le résultat conjecturé à la question 7.

Corrigé : 1. Si $p < n$, il n'y a pas de surjections de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ et si $p = n$, toute surjection est une permutation d'où

$$\boxed{\forall p \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad \mathrm{S}_{n,p} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{n,n} = n!}$$

2. Soit n entier. On a $$f_n(x) = (1 - 1 - x + \mathrm{o}(x))^n$$

D'où $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) = (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)}$$

3. Avec le binôme de Newton, on trouve pour n entier et x réel

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{kx}$$

La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et par dérivation, on obtient

$$f_n^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n \sigma_{n,n}$$

Et d'après le théorème de Taylor-Young et par unicité du développement limité, on identifie

$$f_n^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sigma_{n,n} = n! = \mathrm{S}_{n,n}}$$

4. On a $$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_p)\in[\![1\,;\,r]\!]^p, \mathrm{Card}\,\{x_1,\ldots,x_p\}<r} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_1, \ldots, \mathrm{X}_p = x_p) \\
&= \frac{1}{r^p} \,\mathrm{Card}\, \{(x_1, \ldots, x_p) \in [\![1\,;\,r]\!]^p \mid \mathrm{Card}\, \{x_1, \ldots, x_p\} < r\} \\
&= \frac{1}{r^p} \,\mathrm{Card}\, \{f : [\![1\,;\,p]\!] \to [\![1\,;\,r]\!] \mid \mathrm{Card}\, \mathrm{Im}\, f < r\} \\
\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) &= \frac{1}{r^p} \,\mathrm{Card}\, \left\{f \in [\![1\,;\,r]\!]^{[\![1\,;\,p]\!]},\ f \text{ non surjective}\right\}
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = 1 - \frac{\mathrm{S}_{p,r}}{r^p}}$$

5. On saisit :

```
def S(p,n):
    res=0
    for k in range(n+1):
        res+=(-1)**(n+k)*binom(n,k)*k**p
        #int(binom(..)) pour de grandes valeurs
    return res


def PT(r,p):
    return 1-S(p,r)/r**p
```

6. Soit t réel. On a $$\left\{\frac{\mathrm{T}_r - r\ln r}{r} > t\right\} = \{\mathrm{T}_r > r\ln r + t\}$$

Or, pour k entier et x réel, on a

$$k > x \iff k > \lfloor x \rfloor$$

d'après les propriétés de la partie entière. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{T}_r - r\ln r}{r} > t\right) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r}) \quad \text{avec} \quad p_{t,r} = \lfloor r\ln r + tr \rfloor}$$

7. On saisit :

```
tr=range(5,15,3)
for r in tr:
    deb,fin=-int(np.log(r))+1,r
    tt=np.linspace(deb,fin,1000)
    tTr=[PT(r,int(np.floor(r*np.log(r)+t*r))) for t in tt]
    tG=[1-np.exp(-np.exp(-t)) for t in tt]
    plt.plot(tt,tG,tt,tTr)
    plt.grid();plt.show()
```

On observe :

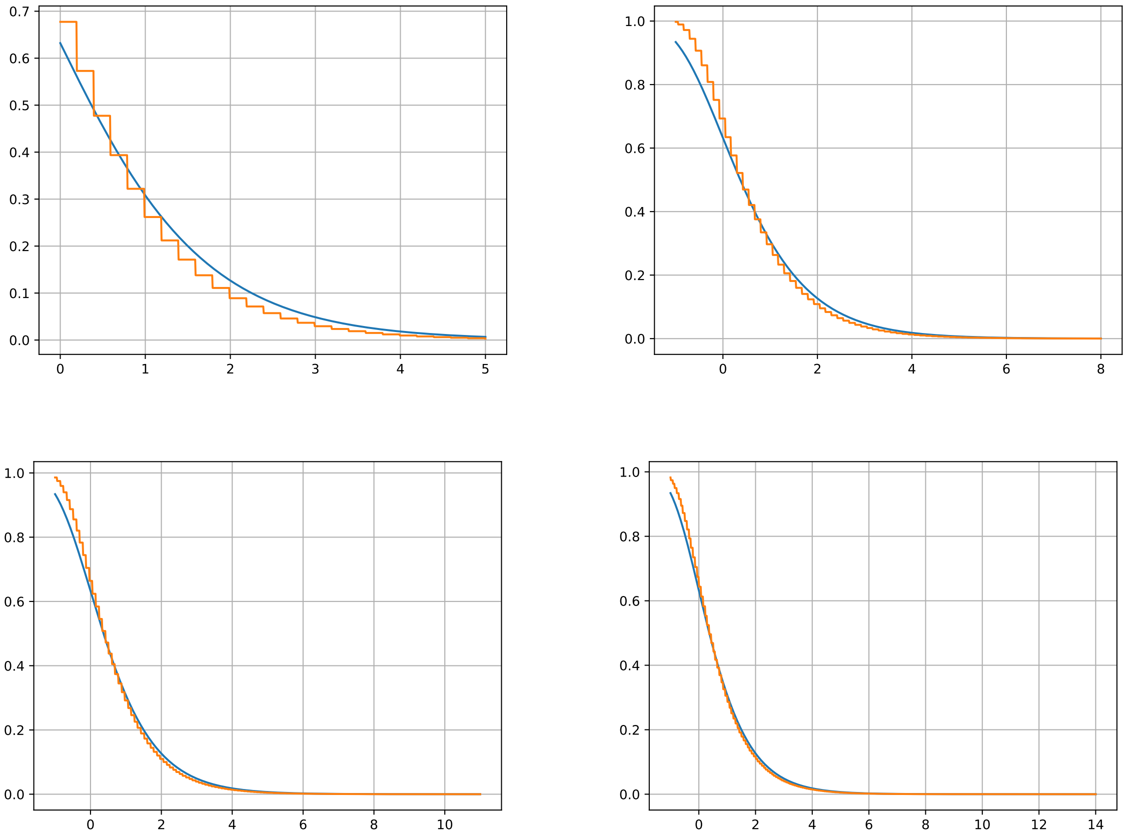

FIGURE 3 – Tracés de $t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r})$ et $t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}$ pour différentes valeurs de r

On peut conjecturer $\boxed{\mathbb{P}\left(\dfrac{\mathrm{T}_r - r\ln r}{r} > t\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}}$

8. Avec le changement d'indice $\ell = r - k$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = -\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^p}$$

9. Pour $r \geqslant k$, on a $\displaystyle \binom{r}{k} = \frac{r^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{r}\right) \ldots \left(1 - \frac{k}{r}\right)}_{k \text{ termes}} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$

Puis, en écrivant $p_{t,r} = r\ln r + tr + \mathrm{O}(1)$, il vient

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} &= \exp\left[(r\ln r + tr + \mathrm{O}(1))\ln\left(1-\frac{k}{r}\right)\right]\\ &= \exp\left[(r\ln r + tr + \mathrm{O}(1))\left(-\frac{k}{r} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\right] = \exp\left[-k\ln r - kt + \mathrm{o}(1)\right]\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall (t,k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad \binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-tk}}{k!}}$$

10. Soit $k \in [\![1\,;\,r]\!]$. On a clairement $\qquad \binom{r}{k} \leqslant \dfrac{r^k}{k!}$

Soit t réel. Avec l'inégalité précédente, on trouve pour $r \geqslant \mathrm{R}$ avec R un seuil assez grand pour avoir $r\ln r + tr \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} &= \exp\left[\lfloor r\ln r + tr\rfloor \ln\left(1-\frac{k}{r}\right)\right]\\ &\leqslant \exp\left[-(r\ln r + tr - 1)\frac{k}{r}\right] \leqslant \frac{\mathrm{e}}{r^k}\mathrm{e}^{-tk}\end{aligned}$$

d'où $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall r \geqslant \mathrm{R} \qquad 0 \leqslant \binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} \leqslant \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{e}^{-tk}}{k!}$$

Ainsi, la série fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^k\binom{r}{k}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{p_{t,r}}$ (avec la convention $\binom{r}{k} = 0$ si $k > r$) converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ (nombre fini de termes pour $r < \mathrm{R}$, histoire de coller à l'indication mais c'est sans importance puisqu'on étudie $r \to +\infty$). On conclut

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{\mathrm{T}_r - r\ln r}{r} > t\right) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}}$$