ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral python - Feuille n°1

Exercice 1 (Centrale 2019)

Pour n entier non nul, on note $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \end{pmatrix}$ et $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+x} - 1$.

1. (a) Tracer le graphe de f_n pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$.
   (b) Déterminer des valeurs approchées de la solution de $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$.
   (c) Écrire une fonction `A(n)` qui renvoie la matrice A_n.
   (d) Calculer les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![3 ; 8]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer la conjecture précédente.
3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que la matrice A_n admet une unique valeur propre λ_n dans $]-1 ; +\infty[$ puis montrer que celle-ci est supérieure à n à partir d'un certain rang.
5. Déterminer un équivalent simple de λ_n pour $n \to +\infty$.
6. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de λ_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note P_n l'ensemble des matrices de E n'ayant pas de valeur propre réelle négative. On pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{P}_n \qquad f(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) \int_0^1 \left(t(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) + \mathrm{I}_n\right)^{-1} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur P_n.
2. Écrire une fonction `exp(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une somme partielle de 100 termes de l'exponentielle de matrice.
3. Écrire une fonction `f(A)` d'argument `A` une matrice carrée qui renvoie une approximation de $f(\mathrm{A})$ par la méthode des rectangles.
4. Pour une matrice `A` aléatoire de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$, afficher `A`, `f(exp(A))` et `exp(f(A))`. Que peut-on conjecturer ?
5. Montrer que l'application définie sur E par $\mathrm{M} \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^\top \mathrm{M})}$ est une norme sous-multiplicative.
6. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{I}_n\| < 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{P}_n$.
   (b) Écrire $f(\mathrm{A})$ comme la somme d'une série.
   (c) Établir $$\exp(f(\mathrm{A})) = \mathrm{A}$$

Exercice 3 (Centrale 2022)

Pour p et n entiers, on note $\mathrm{S}_{p,n}$ le nombre de surjections de $[\![1\,;\,p]\!]$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et

$$\sigma_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k^p$$

Par convention, on pose $[\![1\,;\,0]\!] = \varnothing$ et $\mathrm{S}_{0,0} = 1$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\,r]\!]$ avec $r \geqslant 1$. On définit

$$\mathrm{T}_r = \inf \{ n \geqslant 1 \mid \text{Card}\, \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\} = r \}$$

Pour n entier, on pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$

1. Pour p et n entiers avec $p \leqslant n$, préciser $\mathrm{S}_{p,n}$.
2. Soit n entier. Déterminer un développement limité en zéro à l'ordre n de f_n.
3. Pour n entier, à l'aide de l'unicité du développement limité, en déduire la valeur de $\sigma_{n,n}$ et comparer cette valeur avec $\mathrm{S}_{n,n}$.
   Pour la suite, on admet que $\mathrm{S}_{p,n} = \sigma_{p,n}$ pour tous p et n entiers.
4. Montrer $\qquad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = 1 - \dfrac{\mathrm{S}_{p,r}}{r^p}$
5. Écrire une fonction `S(p,n)` qui renvoie $\mathrm{S}_{p,n}$ et une fonction `PT(r,p)` qui renvoie $\mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p)$.
6. Soit t réel. Établir $\qquad \mathbb{P}\left(\dfrac{\mathrm{T}_r - r \ln r}{r} > t \right) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r})$

   avec $p_{t,r}$ un entier fonction de t et r que l'on précisera.
7. Pour $r \in \{5, 8, 11, 14\}$, représenter sur $[\, \lfloor \ln r \rfloor + 1\,;\, r\,]$ les graphes de $t \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p_{t,r})$ et $t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}$. Que peut-on conjecturer ?
8. Montrer $\qquad \mathbb{P}(\mathrm{T}_r > p) = -\sum_{k=1}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \left(1 - \dfrac{k}{r}\right)^p$
9. Pour t réel et k entier, montrer

$$\binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{p_{t,r}} \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-tk}}{k!}$$

10. Conclure en démontrant le résultat conjecturé à la question 7.