

Préparation à l'oral - Feuille n°3

Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Soit $(u_n)_n$ suite décroissante positive de limite nulle.
 - (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
 - (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^n u_n$.
2. On pose $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$
 - (a) Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.
 - (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Corrigé : Exercice 8 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence
$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(A) \subset [0; +\infty[$$
2. Montrer que pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Corrigé : Exercice 66 CCPINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 dont la loi est donnée par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k)}{e^{2^{j+k}} j! k!}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Prouver l'existence de $\mathbb{E}(2^{X+Y})$ puis la calculer.

Corrigé : Exercice 97 CCPINP 2025

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t)^n}$

1. Justifier que l'intégrale définissant a_n est convergente pour n entier non nul.
2. Montrer la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ et préciser sa limite.
3. Préciser la nature et éventuellement la somme de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$.

4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad f_n(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)^n}$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ et

$$f_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n e^{-nt}$$

d'où l'intégrabilité de f_n en $+\infty$ et on conclut

L'intégrale définissant a_n pour n entier non nul converge.

2. Pour n entier non nul, on considère a_n comme intégrale sur $]0; +\infty[$, faussement impropre en zéro. On a

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[\quad 0 \leq f_n(t) \leq f_1(t) \quad \text{et} \quad \forall t > 0 \quad f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

On a $f_1 \in L^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et par convergence dominée, on conclut

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ est alternée avec $(a_n)_{n \geq 1}$ clairement décroissante et de limite nulle d'où la convergence de la série. Soit N entier non nul. Il vient par linéarité du symbole somme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\text{ch}(t)^n} dt \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\text{ch}(t)} \frac{1 - (-1)^N / \text{ch}(t)^N}{1 + 1/\text{ch}(t)} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - (-1)^N / \text{ch}(t)^N}{\text{ch}(t) + 1} dt \end{aligned}$$

Sans difficulté, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t) + 1}$ converge et par linéarité de l'intégrale (car convergence), il vient

$$\Delta_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t) + 1} = (-1)^N \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + \text{ch}(t)) \text{ch}(t)^N}$$

On observe $|\Delta_N| \leq a_N$ et passant à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t) + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^t dt}{(e^t + 1)^2} \underset{u=e^t+1}{=} -2 \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$

On conclut

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge et sa somme vaut -1 .

4. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$. D'après le résultat de la question précédente, on a $R \geq 1$. On a $\text{ch}(t) \leq e^t$ pour $t \geq 0$ et après intégration, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt \leq a_n$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge d'où la divergence de $\sum_{n \geq 1} a_n$ par comparaison. On en déduit $R \leq 1$ et on conclut

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est égal à 1.

Exercice 5 (Mines-Telecom 2025)

Résoudre l'équation $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Corrigé : Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on trouve $x^2 + x + 1 \in \{\bar{1}, \bar{3}\}$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a

$$x^2 + x + \bar{1} = x^2 - 6x + \bar{1} = (x - \bar{3})^2 - \bar{1} = 0 \iff (x - \bar{3} - \bar{1})(x - \bar{3} + \bar{1}) = \bar{0}$$

et par intégrité du corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on conclut

L'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et admet exactement $\bar{2}$ et $\bar{4}$ comme solutions dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Exercice 6 (Mines 2025)

Soit (G, \times) un groupe abélien fini tel que $|\text{Aut}(G)| = 3$.

1. Montrer que $\varphi : x \in G \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G puis établir

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

2. Montrer que le groupe (G, \times) admet un sous-groupe V d'ordre 4 puis déterminer $\text{Aut}(V)$.
3. Établir qu'il existe un entier r tel que $G \simeq V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ puis en déduire une absurdité.

Corrigé : 1. Soit $(x, y) \in G^2$. Par commutativité, on a

$$\varphi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)$$

et on observe $\varphi^2 = \text{id}$ ce qui signifie que φ est bijective et est son propre inverse. On conclut

$$\varphi \in \text{Aut}(G)$$

On a $\varphi^2 = \text{id}$ d'où $o(\varphi) | 2$ et $o(\varphi) | |\text{Aut}(G)| = 3$ d'où $o(\varphi) | 2 \wedge 3 = 1$. On en déduit $\varphi = \text{id}$ autrement dit $x = x^{-1}$ pour tout $x \in G$ et par conséquent

$$\forall x \in G \quad x^2 = e$$

2. Si $G = \{e\}$, alors $\text{Aut}(G) = \{\text{id}\}$ ce qui est faux. Supposons $G = \{e, x_1\}$ avec $x_1 \neq e$. Soit $f \in \text{Aut}(G)$. On a $f(e) = e$ et si $f(x_1) = e$, alors le morphisme f n'est pas injectif d'où $f(x_1) = x_1$ autrement dit $f = \text{id}$ et par conséquent $\text{Aut}(G) = \{\text{id}\}$. On a donc $|G| > 3$. Soit $x_1 \in G \setminus \{e\}$. On dispose de $x_2 \in G \setminus \langle x_1 \rangle$. On vérifie sans difficulté $\langle x_1 \rangle \cap x_2 \langle x_1 \rangle = \emptyset$ puis que $V = \langle x_1 \rangle \cup x_2 \langle x_1 \rangle$ est sous-groupe de (G, \times) . Ainsi

Le groupe (G, \times) admet un sous-groupe V d'ordre 4.

On a $V = \{e, x_1, x_2, x_1x_2\}$. On note $a_0 = e$, $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$ et $a_3 = x_1x_2$. Soit $f \in \text{Aut}(V)$. On a $f(e) = e$ d'où $f(\{a_1, a_2, a_3\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ par bijectivité et l'application f réalise donc une permutation sur $\{a_1, a_2, a_3\}$. Ainsi, il existe $\sigma \in S_3$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad f(a_i) = a_{\sigma(i)}$$

Réciproquement, pour $\sigma \in S_3$, on pose f_σ définie sur V par

$$f_\sigma(a_0) = a_0 \quad \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad f_\sigma(a_i) = a_{\sigma(i)}$$

On vérifie que pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, on a

$$f_\sigma(a_i a_j) = f(a_k) = a_{\sigma(k)} = a_{\sigma(i)} a_{\sigma(j)} = f_\sigma(a_i) f_\sigma(a_j)$$

ce qui prouve qu'il s'agit bien d'un automorphisme de V . On pose

$$\forall \sigma \in S_3 \quad \Phi(\sigma) = f_\sigma$$

L'application Φ est à valeurs dans $\text{Aut}(V)$ et pour $(\sigma, \gamma) \in S_3^2$

$$\forall i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket \quad \Phi(\sigma \circ \gamma)(a_i) = f_{\sigma \circ \gamma}(a_i) = a_{\sigma \circ \gamma(i)} = f_\sigma(a_{\gamma(i)}) = f_\sigma \circ f_\gamma(a_i)$$

c'est-à-dire

$$\Phi(\sigma \circ \gamma) = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\gamma)$$

et

$$\Phi(\sigma) = \text{id} \iff \sigma = \text{id}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Aut}(V) = \text{Im } \Phi \simeq S_3}$$

3. On note $H_0 = \{e\}$, $H_1 = \langle x_1 \rangle$, $H_2 = H_1 \cup x_1 H_1$ puis si $H_k \neq G$, on dispose de $x_{k+1} \in G \setminus H_k$ et on pose $H_{k+1} = H_k \cup x_{k+1} H_k$ pour k entier ≥ 2 . On vérifie comme à la question précédente que l'ensemble H_{k+1} est un sous-groupe de (G, \times) avec $H_k \cap x_{k+1} H_k = \emptyset$ d'où $|H_{k+1}| = 2|H_k|$. Le procédé se termine puisque la suite $(|H_k|)_k$ est une suite d'entiers strictement croissante et majorée. On dispose donc d'un rang $n \geq 2$ tel que $G = H_n$. Par ailleurs, on montre par récurrence

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad H_k = \left\{ \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} \in \{0, 1\}^k \right\}$$

et en particulier

$$G = H_n = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{0, 1\}^n \right\}$$

Pour $x \in G \setminus \{e\}$, on peut définir $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow x^\alpha$ avec $\alpha \in \bar{\alpha}$ puisque le résultat ne dépend que de la parité de α . On pose alors avec $r = n - 2$

$$\Psi: \begin{cases} V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r & \longrightarrow G \\ (x, (\bar{\alpha}_3, \dots, \bar{\alpha}_n)) & \longmapsto x \prod_{i=3}^n x_i^{\alpha_i} \end{cases} \quad \text{avec } \forall i \in \llbracket 3; n \rrbracket \quad \alpha_i \in \bar{\alpha}_i$$

Comme $V = \{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2\}$, l'application Ψ est clairement surjective. On a

$$\text{Card } V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r = 2^2 \times 2^r = 2^{r+2} = 2^n = \text{Card } G$$

Il s'ensuit que l'application Ψ est injective. Enfin, en munissant $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ de la loi de groupe \star idoine, on a pour $(x, (\bar{\alpha}_3, \dots, \bar{\alpha}_n))$ et $(y, (\bar{\beta}_3, \dots, \bar{\beta}_n))$ dans $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$

$$\begin{aligned} \Psi((x, (\bar{\alpha}_3, \dots, \bar{\alpha}_n)) \star (y, (\bar{\beta}_3, \dots, \bar{\beta}_n))) &= \Psi((xy, (\bar{\alpha}_3 + \bar{\beta}_3, \dots, \bar{\alpha}_n + \bar{\beta}_n))) \\ &= xy \prod_{i=3}^n x_i^{\alpha_i + \beta_i} = x \prod_{i=3}^n x_i^{\alpha_i} \times y \prod_{i=3}^n x_i^{\beta_i} = \Psi(x) \times \Psi(y) \end{aligned}$$

L'application Ψ est donc un isomorphisme de groupes d'où

$$\boxed{G \simeq V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \quad \text{avec } r \in \mathbb{N}}$$

Pour $f \in \text{Aut}(V)$, on peut construire un prolongement $\tilde{f} \in \text{Aut}(G)$ en posant

$$\tilde{f}: \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x = \Psi(x_V, (\bar{\alpha}_3, \dots, \bar{\alpha}_n)) & \longmapsto f(x_V) \prod_{i=3}^n x_i^{\alpha_i} \end{cases}$$

On en déduit $|\text{Aut}(G)| \geq |\text{Aut}(V)| = |S_3| = 3! = 6$ ce qui est absurde puisqu'on a supposé $|\text{Aut}(G)| = 3$. On conclut

$\boxed{\text{Il n'existe pas de groupe abélien fini dont le groupe des automorphismes est de cardinal égal à 3.}}$

Exercice 7 (Mines 2025)

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0; +\infty[$ à valeurs réelles et de carré intégrable muni la norme $\|\cdot\|_2$. On pose

$$\forall f \in E \quad \varphi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer $\varphi \in \mathcal{L}_c(E)$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité de l'intégrale (sur segment) et linéarité de l'évaluation. Soit $f \in E$. Notons $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x \geq 0$. D'après le théorème fondamental d'analyse, on a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $F' = f$. La fonction $\varphi(f)$ est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, on a

$$\forall x > 0 \quad \varphi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0) = \varphi(f)(0)$$

Ainsi, la fonction $\varphi(f)$ est continue sur $[0; +\infty[$. On procède ensuite par intégration par parties. On a

$$\int_0^x \varphi(f)(t)^2 dt = \left[-\frac{F(x)^2}{x} \right] + \int_0^x \left[\frac{2f(t)}{t} \int_0^t f(u) du \right] dt$$

en particulier
$$\frac{F(x)^2}{x} = x \left(\frac{F(x)}{x} \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

d'où
$$\forall a \geq 0 \quad \int_0^a \varphi(f)(x)^2 dx = -\frac{F(a)^2}{a} + 2 \int_0^a \varphi(f)(x) f(x) dx \leq 2 \int_0^a \varphi(f)(x) f(x) dx$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\forall a \geq 0 \quad \left(\int_0^a \varphi(f)(x)^2 dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^a \varphi(f)(x) f(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_0^a \varphi(f)(x)^2 dx \int_0^a f(x)^2 dx$$

En supposant f non identiquement nulle et par conséquent $\varphi(f)$ non plus, on obtient

$$\forall a \geq 0 \quad \int_0^a \varphi(f)(x)^2 dx \leq 4 \int_0^a f(x)^2 dx \leq 4 \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$$

Par limite monotone (intégrande positif), le terme de gauche admet une limite finie pour $a \rightarrow +\infty$ et on obtient

$$\|\varphi(f)\|^2 \leq 4\|f\|^2$$

On en déduit que φ est lipschitzienne en 0_E et on conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}_c(E)}$$

Exercice 8 (Centrale 2025)

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Jensen puis en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note H l'intersection des convexes de \mathbb{C} contenant les racines de P .
Montrer que l'ensemble H est convexe et compact.
3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus H$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $q \in \mathbb{H}$ tel que $d(z, \mathbb{H}) = d(z, q)$.

(b) Montrer qu'il existe $\psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{H} \quad \left| \arg \left(\frac{z-h}{z-q} \right) \right| \leq \psi$$

(argument dans $] -\pi; \pi [$).

Corrigé : 1. Voir cours.

2. On vérifie sans difficulté qu'une intersection de parties convexes est convexe. Soit A une partie convexe de \mathbb{C} et $z \in \mathbb{C}$. On note $\text{Conv}(A)$ l'intersection des parties convexes contenant A qu'on appelle *enveloppe convexe* de A et qui est, par construction, le plus petit ensemble convexe contenant A . On montre l'égalité

$$\text{Conv}(A \cup \{z\}) = \{\lambda a + (1-\lambda)z, (a, \lambda) \in A \times [0; 1]\}$$

On note $\Lambda = \{\lambda a + (1-\lambda)z, (a, \lambda) \in A \times]0; 1]\}$. Soit $(a, b) \in A^2$ et $(\lambda, \mu) \in [0; 1]^2$. Pour $\alpha \in [0; 1]$, on a

$$\alpha(\lambda a + (1-\lambda)z) + (1-\alpha)(\mu b + (1-\mu)z) = \gamma(\tau a + (1-\tau)b) + (1-\gamma)z$$

avec

$$\gamma = \mu(1-\alpha) + \lambda\alpha \quad \tau = \frac{\alpha\lambda}{\gamma}$$

On a $\tau a + (1-\tau)b \in A$ d'où

$$\gamma(\tau a + (1-\tau)b) + (1-\gamma)z \in \Lambda$$

Si $\lambda = 0$, on a

$$\alpha z + (1-\alpha)(\mu b + (1-\mu)z) = (1-\alpha)\mu b + (1-(1-\alpha)\mu)z \in \Lambda$$

et de même si $\mu = 0$. On en déduit la convexité de Λ et par conséquent $\text{Conv}(A \cup \{z\}) \subset \Lambda$ et l'enveloppe convexe $\text{Conv}(A \cup \{z\})$ contient A et z et est convexe donc contient Λ . On note z_1, \dots, z_n les racines de P et $C_k = \text{Conv}(\{z_1, \dots, z_k\})$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On procède par récurrence sur l'entier n pour établir que l'ensemble C_n est compact. On a $C_1 = \{z_1\}$ compact. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ avec n entier ≥ 2 . On a clairement

$$\{z_1, \dots, z_n\} \subset C_{n-1} \cup \{z_n\}$$

d'où

$$C_n \subset \text{Conv}(C_{n-1} \cup \{z_n\})$$

et

$$C_{n-1} \cup \{z_n\} \subset C_n$$

d'où

$$\text{Conv}(C_{n-1} \cup \{z_n\}) \subset C_n$$

et par conséquent, on a montré l'égalité

$$\text{Conv}(C_{n-1} \cup \{z_n\}) = C_n$$

On pose

$$\varphi: \begin{cases} C_{n-1} \times [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, \lambda) \longmapsto \lambda a + (1-\lambda)z_n \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté la continuité de φ et d'après le résultat préliminaire, on a

$$\varphi(C_{n-1} \times [0; 1]) = C_n$$

qui est donc compact comme image directe d'un compact (produit fini de compacts) par une application continue. On conclut

L'ensemble H est convexe et compact.

3.(a) L'application $h \mapsto d(z, h)$ est continue car lipschitzienne et admet donc un minimum sur H ce qui prouve qu'il existe $q \in H$ tel que

$$d(z, q) = \inf_{h \in H} d(z, h) = d(z, H)$$

Soit $q' \in H$ qui réalise cette égalité. On a par convexité $\frac{q+q'}{2} \in H$ puis par inégalité triangulaire

$$d(z, H) \leq \left| \frac{q+q'}{2} - z \right| = \frac{1}{2} |q - z + q' - z| \leq \frac{1}{2} (|z - q| + |z' - q|) = d(z, H)$$

On est dans le cas d'égalité d'où $q - z$ et $q - z'$ positivement colinéaires et comme ils ont même module, on en déduit $q - z = q - z'$ d'où $q = q'$. On conclut

Il existe un unique $q \in H$ tel que $d(z, q) = d(z, H)$

Remarque : On peut aussi utiliser l'identité de la médiane pour établir l'unicité :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2 \quad |u|^2 + |v|^2 = 2 \left(\left| \frac{u+v}{2} \right|^2 + \left| \frac{u-v}{2} \right|^2 \right)$$

3.(b) Soit $h \in H$. On pose

$$\forall \lambda \in]0; 1] \quad \varphi(\lambda) = |z - (\lambda h + (1 - \lambda)q)|^2 - |z - q|^2$$

On a $\varphi(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \in]0; 1]$ puisque $\lambda h + (1 - \lambda)q \in H$ et on trouve en développant

$$\forall \lambda \in]0; 1] \quad \varphi(\lambda) = 2\lambda \operatorname{Re}((z - q)\overline{(q - h)}) + \lambda^2 |q - h|^2$$

d'où $\forall \lambda \in]0; 1] \quad 2 \operatorname{Re}((z - q)\overline{(q - h)}) + \lambda |q - h|^2 \geq 0$

et faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, on obtient

$$\operatorname{Re}((z - q)\overline{(q - h)}) = \operatorname{Re}(\overline{(z - q)}(q - h)) \geq 0$$

Puis, on a

$$\overline{(z - q)}(q - h) = \overline{(z - q)}(q - z + z - h) = \overline{(z - q)}(z - h) - |z - q|^2$$

et passant à la partie réelle, il vient

$$\operatorname{Re}(\overline{(z - q)}(z - h)) \geq |z - q|^2 = (z - q)\overline{(z - q)}$$

d'où $\operatorname{Re} \left(\frac{(z - h)\overline{(z - q)}}{(z - q)\overline{(z - q)}} \right) \geq 1$

autrement dit $\operatorname{Re} \left(\frac{z - h}{z - q} \right) \geq 1$

On note $\frac{z - h}{z - q} = re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[$

On a donc $r \cos(\theta) \geq 1$ d'où $\cos(\theta) \geq \frac{1}{r}$. L'application $h \mapsto \left| \frac{z - h}{z - q} \right|$ est continue et atteint un maximum sur le compact H . On en déduit qu'il existe $h^* \in H$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{H} \quad \left| \frac{z-h}{z-q} \right| = r \leq R \quad \text{avec} \quad \frac{z^* - h}{z^* - q} = \operatorname{Re}^{i\xi}$$

On a en particulier $\frac{1}{R} \leq \cos(\xi) \leq 1$ puis

$$\theta = \arg \left(\frac{z-h}{z-q} \right) \in [-\psi; \psi] \quad \text{avec} \quad \psi = \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{R} \right)$$

On conclut $\exists \psi \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\quad | \quad \forall h \in \mathbb{H} \quad \left| \arg \left(\frac{z-h}{z-q} \right) \right| \leq \psi$

Exercice 9 (X 2025)

On pose
$$\alpha = 4 \sum_{k=0}^{499\,999} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Montrer qu'il y a exactement une des 16 premières décimales de α qui diffère de celle de π .

Corrigé : On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad S = \pi$$

On a pour n entier

$$S_n = 4 \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t^2)^k dt = 4 \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = S + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$$

Ainsi, pour n impair
$$S - S_n = 4I_{2(n+1)}$$

Pour n entier non nul, avec le changement de variables $u = t^n$, il vient

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} du$$

Par convergence dominée, on établit

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} du - \frac{1}{2} = - \int_0^1 \frac{(n(u^{1/n} - 1))^2}{2(1+u^{2/n})} du$$

Avec l'inégalité de convexité $e^x - 1 \geq x$ pour x réel, on obtient

$$0 \geq n(u^{1/n} - 1) = n \left(e^{\frac{\ln(u)}{n}} - 1 \right) \geq \ln(u)$$

d'où
$$0 \leq (n(u^{1/n} - 1))^2 \leq \ln(u)^2$$

On en déduit

$$|n^2 J_n| \leq \int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{2} du = \frac{1}{2} \left([u \ln(u)^2]_0^1 - \int_0^1 2 \ln(u) du \right) = 1$$

Avec la relation
$$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3} n^2 J_n$$

on obtient

$$\left| S - S_n - \frac{2}{2(n+1)} \right| = \frac{4}{(2(n+1))^3} |(2(n+1))^2 J_{2(n+1)}| \leq \frac{4}{(2(n+1))^3}$$

et avec $n = 5 \times 10^5 - 1$, on a $2(n+1) = 10^6$, on a donc

$$|S - S_n - 2 \times 10^{-6}| \leq 4 \times 10^{-18}$$

En admettant que la décimale portant sur 10^{-6} n'est pas 8 ou 9 et que la modification portant sur 10^{-18} ne se propage au delà de la 17-ième décimale, on conclut

Il y a exactement une des 16 premières décimales de α qui diffère de celle de π .

Exercice 10 (ENS 2025)

Soient n, k entiers non nuls et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice M est diagonalisable si et seulement si les matrices A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.

Corrigé : On suppose les matrices A et B diagonalisables et qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ tel que $C = AX - XB$. On pose $P = \left(\begin{array}{c|c} I_n & X \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right)$ et $M' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$. Sans difficulté, on trouve $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -X \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right)$ puis

$$P^{-1}M'P = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -X \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & X \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & AX - XB \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = M$$

Ainsi, les matrices M et M' sont semblables. Par ailleurs, en prenant $Q = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B)} (X - \lambda)$, on a $\pi_A|Q$ et $\pi_B|Q$ d'où

$$Q(M') = \left(\begin{array}{c|c} Q(A) & 0 \\ \hline 0 & Q(B) \end{array} \right) = 0$$

avec le polynôme Q scindé à racines simples. On en déduit que la matrice M' est diagonalisable et par conséquent la matrice M l'est aussi. Réciproquement, on suppose la matrice M diagonalisable. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$ annulateur de M scindé à racines simples, on trouve

$$Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A) & * \\ \hline 0 & Q(B) \end{array} \right) = 0$$

Il s'ensuit que les matrices A et B sont diagonalisables et par conséquent la matrice M' également sans difficulté. Or, on a $\chi_M = \chi_A \chi_B = \chi_{M'}$ donc les valeurs propres de M et M' sont les mêmes avec même multiplicité et par conséquent, les matrices M et M' sont semblables. Pour $V = \left(\begin{array}{c|c} W & X \\ \hline Y & Z \end{array} \right)$, on pose

$$\varphi_1(V) = M'V - VM' = \left(\begin{array}{c|c} AW - WA & AX - XB \\ \hline BY - YA & BZ - ZB \end{array} \right)$$

et $\varphi_2(V) = MV - VM' = \left(\begin{array}{c|c} AW + CY - WA & AX + CZ - XB \\ \hline BY - YA & BZ - ZB \end{array} \right)$

On dispose de $P \in \text{GL}_{n+k}(\mathbb{C})$ telle que $M = PM'P^{-1}$. On observe pour $V \in \mathcal{M}_{n+k}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} V \in \text{Ker } \varphi_2 &\iff MV = VM' \iff PM'P^{-1}V = VM' \\ &\iff M'P^{-1}V = P^{-1}VM' \iff P^{-1}V \in \text{Ker } \varphi_1 \end{aligned}$$

L'application $V \mapsto P^{-1}V$ réalise donc un isomorphisme entre $\text{Ker } \varphi_2$ et $\text{Ker } \varphi_1$. Pour $V \in \text{Ker } \varphi_i$ avec $i = 1$ ou 2 , on a $BY = YA$ et $BZ = ZB$. On pose

$$F = \{(Y, Z) \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \mid BY = YA \text{ et } BZ = ZB\}$$

et on considère pour $i = 1$ ou 2 les projections :

$$\pi_i: \begin{cases} \text{Ker } \varphi_i &\longrightarrow F \\ V &\longmapsto (Y, Z) \end{cases}$$

Sans difficulté, on trouve

$$\text{Ker } \pi_i = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} W & X \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \mid AW = WA, AX = XB \right\}$$

Pour $(Y, Z) \in F$ et $V = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline Y & Z \end{array} \right)$, on a $V \in \text{Ker } \varphi_1$ et $\pi_1(V) = (Y, Z)$ d'où $\text{Im } \pi_1 = F$ et par conséquent $\text{Im } \pi_2 \subset \text{Im } \pi_1$. Or, avec le théorème du rang, il vient

$$\begin{aligned} \text{rg}(\pi_1) + \dim \text{Ker } \pi_1 &= \dim \text{Ker } \varphi_1 \\ &= \dim \text{Ker } \varphi_2 = \text{rg}(\pi_2) + \dim \text{Ker } \pi_2 \end{aligned}$$

On en déduit $\text{rg}(\pi_1) = \text{rg}(\pi_2)$ d'où $\text{Im } \pi_1 = \text{Im } \pi_2$ par inclusion et égalité des dimensions.

Pour $V_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_k \end{array} \right)$, on a $V_1 \in \text{Ker } \varphi_1$ et $\pi_1(V_1) = (0, -I_k)$. On en déduit qu'il existe

$V_2 = \left(\begin{array}{c|c} W & X \\ \hline 0 & -I_k \end{array} \right) \in \text{Ker } \varphi_2$ telle que $\pi_2(V_2) = (0, -I_k)$. On a

$$V_2 \in \text{Ker } \varphi_2 \iff \begin{cases} AW - WA = 0 \\ AX - C - XB = 0 \end{cases} \implies AX - XB = C$$

On conclut

La matrice M est diagonalisable si et seulement si les matrices A et B le sont et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.

Remarque : On a notamment démontré le *théorème de Roth* qui s'énonce ainsi : les matrices M et M' sont semblables si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$ telle que $C = AX - XB$.