

## Préparation à l'oral - Feuille n°6

### Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente à termes complexes. On pose  $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$  et

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; +\infty[ \quad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$$

- (a) Justifier que la suite  $(a_n)_n$  est bornée.  
(b) Justifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .

On admettra dans la suite de l'exercice que  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

- (a) Justifier que pour tout  $n$  entier, la fonction  $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et calculer  $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ .

(b) Prouver 
$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

### Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit  $n$  entier avec  $n \geq 2$ . On pose  $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

- On suppose  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . Déterminer le module et un argument de  $z^k - 1$ .
- On pose  $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$ . Montrer que  $S = \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ .

### Exercice 3 (Mines-Telecom 2025)

Soit la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les éléments propres de  $A$ .

### Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = xy(1 - x - y)$

Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum de  $f$  sur  $K = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x + y \leq 1\}$  puis préciser où ceux-ci sont atteints.

### Exercice 5 (Mines 2025)

Donner un exemple de forme linéaire discontinue sur un espace vectoriel normé.

### Exercice 6 (Mines 2025)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans  $[a; b]$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ . Pour  $n$  entier non nul, on note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Montrer

$$\mathbb{E} \left( f \left( \frac{S_n}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\mathbb{E}(X_1))$$

### Exercice 7 (Centrale 2025)

Pour  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit  $A_c(f)$  par

$$A_c(f) = \inf \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ converge absolument} \right\}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$  et on note  $Lf(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$  la somme de la série quand celle-ci converge absolument.

1. Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $s > A_c(f)$ . Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$  converge absolument.
3. Soient  $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $A_c(f) < +\infty$  et  $A_c(g) < +\infty$ .

(a) On suppose  $\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)) \quad Lf(s) = Lg(s)$

Montrer que  $f = g$ .

(b) On définit  $f \star g$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Montrer  $\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)) \quad L_{f \star g}(s) = Lf(s)Lg(s)$

### Exercice 8 (X 2025)

Soient  $(u_n)_n$  une suite réelle telle que

$$u_{n+1} - \frac{u_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Montrer  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

### Exercice 9 (X 2025)

Pour quel entier  $n$  non nul le nombre réel  $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  est-il rationnel?

### Exercice 10 (ENS 2025)

Soit  $E$  espace euclidien et  $u, v$  dans  $\mathcal{S}^+(E)$ . Montrer que l'endomorphisme  $u \circ v$  est diagonalisable avec  $\text{Sp}(u \circ v) \subset \mathbb{R}_+$ .