

**IMT - BEOS 8850****Exercice 1**

On a un QCM de 40 questions. Chaque question comporte 4 choix et 1 seule bonne réponse existe. Un élève y répond au hasard. Chaque bonne réponse rapporte 3 points et chaque mauvaise en fait perdre 1. On note, pour tout  $i \in \llbracket 1, 40 \rrbracket$ ,  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse à la  $i$ -ème question est bonne, 0 sinon. On note  $Y$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de points.

1. Donner la loi de  $X_i$ .
2. Donner la loi de  $Y$ .
3. Calculer l'espérance de  $Y$ .
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer  $p$ , la probabilité d'avoir une note supérieure à 60.

**Exercice 2**

Soit  $n \geq 3$  un entier impair. On pose  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .

1. Factoriser dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $Q(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ .
2. Montrer que  $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$  a du sens et calculer sa valeur.
3. Calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

**IMT - BEOS 8728****Exercice 1**

1. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres. On note pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_A(X) = X^T A X$ . Montrer que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.

**Exercice 2**

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  et on note  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ .

1. Exprimer  $\mathbb{P}(X \geq n)$  et  $\mathbb{P}(X \leq n)$ .
2. Donner la loi de  $U$  et  $V$ .

**Centrale - BEOS 8926**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^m$ . On note

$$\text{Coh}((e_i)_{i \in I}) = \sup\{|\langle e_i, e_j \rangle|, i, j \in I, i \neq j\}.$$

1. (a) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
(b) Si  $\text{Coh}((e_i)_{i \in I}) = 0$ , que peut-on dire de la famille  $(e_i)_{i \in I}$  ?  
(c) Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire discrète bornée. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{tX}$  est d'espérance finie.

2. Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^m$  telle que  $\text{Coh}((e_i)_{i \in I}) \leq \varepsilon$ .  
Montrer que l'ensemble  $I$  est de cardinal fini.
3. On appelle vecteur de Rademacher toute variable aléatoire  $X$  telle qu'il existe des variables aléatoires mutuellement indépendantes  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de même loi, vérifiant  $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$ ,  $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$  et pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1(\omega), \dots, X_m(\omega))$ .

(a) Soient  $X$  et  $Y$  des vecteurs de Rademacher indépendants. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}(e^{t\langle X, Y \rangle}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right).$$

(b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe un ensemble fini  $I$  de cardinal  $\lfloor e^{m\varepsilon^2/4} \rfloor$  et une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^m$  tels que  $\text{Coh}((e_i)_{i \in I}) < \varepsilon$ .

## Mines - BEOS 8748

### Exercice 2

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Tr}(u) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $\langle u(x), x \rangle = 0$ .
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  a une diagonale nulle.