

Préparation à l'oral - Feuille n°5

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

- (a) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E .
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|_1 \leq k\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 (CCINP 2025)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit n entier non nul et E ensemble à n éléments.

- Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

Montrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2t} - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

Soit n entier non nul et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f(F)$ est fermé dans \mathbb{R}^n . On suppose également que $df(a)$ est bijective pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. On note $X = f(\mathbb{R}^n)$.

- Montrer
$$\forall x \in X \quad T_x X = \mathbb{R}^n$$
- Établir que $X = \mathbb{R}^n$. On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 6 (Mines 2025)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M_n = \max_{\sigma \in S_n} o(\sigma)$

1. Établir $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq M_n \leq n!$

2. Soit $n \geq 4$. Montrer $M_n \leq \max_{2 \leq k \leq n-1} kM_{n-k}$

3. Établir $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(3^{n/3})$

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie et C un convexe compact d'intérieur non vide symétrique par rapport à 0_E . On pose

$$\forall x \in E \quad j_C(x) = \inf \left\{ \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in C \right\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. (a) Rappeler la définition d'une norme.
(b) Montrer que l'application j_C est à valeurs réelles positives et qu'elle est homogène.
(c) Établir pour $x \in E \quad j_C(x) = 0 \iff x = 0_E$

2. (a) Montrer pour $x \in E \quad X \in C \iff j_C(x) \in [0; 1]$

(b) Établir $\forall (x, y) \in E^2 \quad j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$

Indication : Pour $\varepsilon > 0$, on pourra poser pour $(x, y) \in E^2$

$$x' = \frac{x}{j_C(x) + \varepsilon} \quad y' = \frac{y}{j_C(y) + \varepsilon} \quad t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$$

3. On munit l'espace E d'une norme. Montrer l'existence d'une application $f : E \rightarrow E$ continue, bijective et telle que $f(C) = \overline{B(0, 1)}$ et $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0, 1)$.

Exercice 8 (X 2025)

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(a_n)_n$ tendant vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 (ENS 2025)

Pour ω réel, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit φ un morphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$. Montrer qu'il existe $\omega_1, \dots, \omega_r$ réels et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = P \operatorname{diag}(e^{tR(\omega_1)}, \dots, e^{tR(\omega_r)}, I_{n-2r}) P^\top$$