ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral - Feuille n°4

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $\mathrm{R} > 0$?

Corrigé : Exercice 15 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels.

La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Corrigé : Exercice 67 CCPINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit N entier non nul, $p \in \,]0;1[$, $q = 1 - p$. On considère $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Pour $i \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$ et n entier non nul, déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.
2. On pose $\mathrm{Y} = \min(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$.
   (a) Pour n entier non nul, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > n)$. En déduire $\mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y et préciser $\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

Corrigé : Exercice 102 CCINP 2025

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n

1. Soient u, v des endomorphismes nilpotents non nuls de E qui commutent.

   Montrer $$\mathrm{rg}\,(u \circ v) < \mathrm{rg}\,(v)$$
2. Soient $u_1, \ldots u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Montrer $u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Corrigé : 1. Si $\mathrm{rg}\,(u \circ v) = 0$, c'est immédiat puisque l'endomorphisme v est non nul d'où $\mathrm{rg}\,(v) > 0$. On suppose $u \circ v \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Le sev $\mathrm{Im}\ v$ est stable par u et on peut donc considérer l'induit $u_{\mathrm{Im}\ v}$. Ce n'est pas l'endomorphisme nul d'après ce qui précède. Par ailleurs, c'est un endomorphisme nilpotent en tant qu'induit d'un nilpotent et son indice de nilpotence p est $\geqslant 2$. On a $u_{\mathrm{Im}\ v}^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{Im}\ v)}$. Ainsi, il existe $y \in \mathrm{Im}\ v$ tel que $u^{p-1}(y) \neq 0_{\mathrm{E}}$ et il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = v(x)$. Par conséquent, on a

$$(u \circ v)(u^{p-1}(x)) = u^p(v(x)) = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad v(u^{p-1}(x)) = u^{p-1}(v(x)) \neq 0_{\mathrm{E}}$$

d'où
$$\mathrm{Ker}\ v \subsetneq \mathrm{Ker}\ u \circ v$$

Avec le théorème du rang, on conclut

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(u \circ v) < \mathrm{rg}\,(v)}$$

Variante : On procède par l'absurde en supposant $\mathrm{Im}\ u \circ v = \mathrm{Im}\ v$. Soit k entier. Pour $y \in \mathrm{Im}\ u^{k+1} \circ v$, on dispose de $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u^{k+1} \circ v(x) = u^k \circ v(u(x)) \in \mathrm{Im}\ u^k \circ v$. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}\ u^k \circ v$. On dispose de $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u^k \circ v(x)$. Or, on a $v(x) \in \mathrm{Im}\ v = \mathrm{Im}\ u \circ v$ d'où l'existence de $t \in \mathrm{E}$ tel que $v(x) = u \circ v(t)$. Ainsi, on trouve $y = u^{k+1} \circ v(t)$ et on a donc établi

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Im}\ u^{k+1} \circ v = \mathrm{Im}\ u^k \circ v$$

La suite $\left(\mathrm{Im}\ u^k \circ v\right)_k$ est donc constante et comme l'endomorphisme u est nilpotent, on en déduit $\mathrm{Im}\ v = \{0_{\mathrm{E}}\}$ ce qui est faux. On a donc

$$\mathrm{Im}\ u \circ v \neq \mathrm{Im}\ v$$

et par commutation, on a l'inclusion $\mathrm{Im}\ u \circ v = \mathrm{Im}\ v \circ u \subset \mathrm{Im}\ v$ d'où le résultat.

2. On suppose $u_1 \circ \ldots u_n \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. On peut donc appliquer la question précédente avec $u_1 \circ \ldots \circ u_{n-1}$ et u_n qui sont nilpotentes non nuls et qui commutent. On en déduit

$$\mathrm{rg}\,(u_1 \circ \ldots \circ u_n) \leqslant \mathrm{rg}\,(u_1 \circ \ldots \circ u_{n-1}) - 1$$

et par récurrence, on obtient

$$\mathrm{rg}\,(u_1 \circ \ldots \circ u_n) \leqslant \mathrm{rg}\,(u_1) - n + 1$$

Or, on a $\mathrm{rg}\,(u_1) < n$ puisque l'endomorphisme u_1 est nilpotent donc non inversible. On en déduit

$$\mathrm{rg}\,(u_1 \circ \ldots \circ u_n) \leqslant n - 1 - n + 1 = 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. On conclut

$$\boxed{u_1 \circ \ldots \circ u_n = 0}$$

Exercice 5 (Mines-Telecom 2025)

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$\forall (f, x) \in \mathrm{E} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{T}(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E})$ et calculer $\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}}$.

Corrigé : Soit $f \in \mathrm{E}$ et $x \in [\,0\,;1\,]$. L'intégrande $t \mapsto \min(x, t) f(t)$ est continu (par morceaux) sur le segment $[\,0\,;1\,]$ ce qui prouve que $\mathrm{T}(f)(x)$ est bien défini. L'application $\mathrm{T}(f)$ est linéaire par bilinéarité du produit et de l'intégrale. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(f)(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'après le théorème fondamental d'intégration, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ (de classe $\mathscr{C}^1$ en fait) et on en déduit que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$. Puis, par inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant \int_0^x t\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t\\
|\mathrm{T}(f)(x)| &\leqslant \left(\frac{x^2}{2} + x(1-x)\right)\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + x(1-x) = \dfrac{x}{2}(2-x)$ atteint son maximum sur $[\,0\,;1\,]$ en $x = 1$ et on obtient

$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

ce qui prouve le caractère lipschitzien de $\mathrm{T}(f)$ en 0_{E}. Enfin, pour $f = \mathbb{1} \in \mathrm{E}$, il vient pour $x \in [\,0\,;1\,]$

$$|\mathrm{T}(f)(x)| = \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \mathrm{d}t = \frac{x}{2}(2-x)$$

d'où
$$\|\mathrm{T}(f)\|_\infty = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{2}}$$

Remarque : On aurait pu invoquer la continuité sous l'intégrale pour établir $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$ pour $f \in \mathrm{E}$ mais cette démarche demande un effort spécifique contrairement à l'approche présentée ci-avant.

Exercice 6 (Mines 2025)

On pose
$$\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad k_j = \operatorname{Min}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant j\right\}$$

1. Montrer que la quantité k_j est bien définie pour j entier non nul.
2. Étudier la monotonie et le comportement asymptotique de $(k_j)_{j\geqslant 1}$.
3. Établir
$$\frac{k_{j+1}}{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \mathrm{e}$$

Corrigé : 1. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Soit j entier non nul. On a $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et par suite, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant j\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ donc admet un plus petit élément ce qui prouve que

$$\boxed{\text{L'application } j \in \mathbb{N}^* \mapsto k_j \text{ est bien définie.}}$$

2. Soit j entier non nul. On clairement

$$\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant j+1\} \subset \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{H}_n \geqslant j\}$$

et passant au minimum, on en déduit la croissance de $(k_j)_{j\geqslant 1}$. Si la suite est majorée, on dispose de N entier entier non nul tel que $k_j \leqslant \mathrm{N}$ pour tout j entier non nul d'où

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{H}_\mathrm{N} \geqslant \mathrm{H}_{k_j} \geqslant j$$

ce qui est clairement faux. La suite $(k_j)_{j\geqslant 1}$ est donc non majorée et on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (k_j)_{j\geqslant 1} \text{ croît avec } k_j \xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty.}$$

3. En considérant la série téléscopique associée à la suite $(\mathrm{H}_n - \ln(n))_{n\geqslant 1}$, on obtient le développement asymptotique

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

avec γ un réel appelé *constante d'Euler*. Par définition de $j \mapsto k_j$, il vient

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \qquad j \leqslant \mathrm{H}_{k_j} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_{k_j-1} < j$$

Comme $k_j \xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty$, on obtient

$$j \leqslant \ln(k_j) + \gamma + \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad \ln(k_j - 1) + \gamma + \mathrm{o}(1) < j$$

d'où
$$\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)} \leqslant k_j < 1 + \mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}$$

On conclut
$$\boxed{k_j \underset{j\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{j-\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{k_{j+1}}{k_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \mathrm{e}}$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$ pour n entier.

1. Montrer, par comparaison série/intégrale, que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^4}$ converge.

2. (a) Soit n entier. Établir $\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant a) \leqslant \dfrac{3n^2}{a^4}$

   (b) On pose
$$\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} \left\{|\mathrm{S}_m| < m^{3/4}\ln(m)\right\}$$
   Montrer
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$$

3. Établir
$$\frac{\mathrm{S}_n}{n^{3/4}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{presque sûrement}$$

Corrigé : 1. On pose $$\forall t \geqslant 2 \qquad f(t) = \frac{1}{t\ln(t)^4}$$

On a $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,2\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ décroissante. Par suite

$$\forall k \geqslant 2 \qquad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et après sommation pour n entier $\geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) \leqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variables $u = \ln(t)$, les intégrales

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^4} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^4}$$

sont de même nature donc convergentes d'après le critère de Riemann. Comme la fonction f est positive, on a pour n entier $\geqslant 2$

$$\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} = \int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où $$\forall n \geqslant 2 \qquad \sum_{k=2}^{n} f(k+1) \leqslant \int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite des sommes partielles est donc croissante majorée et par conséquent

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)^4} \text{ converge.}}$$

2.(a) Soit n entier. La variable S_n est finie comme somme de variables finies. Soit $a > 0$. D'après l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant a) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n^4 \geqslant a^4) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4)}{a^4}$$

On pose $$\mathscr{P}(n) : \qquad \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) \leqslant 3n^2$$

La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. On a

$$\mathbb{E}\left((\mathrm{S}_n + \mathrm{X}_{n+1})^4\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{S}_n^4 + 4\mathrm{S}_n^3\mathrm{X}_{n+1} + 6\mathrm{S}_n^2\mathrm{X}_{n+1}^2 + 4\mathrm{S}_n\mathrm{X}_{n+1}^3 + \mathrm{X}_{n+1}^4\right)$$

Par linéarité de l'espérance et indépendance de S_n et X_{n+1}, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) + 4\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^3)\underbrace{\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1})}_{=0} + 6\mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2)\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^2) + 4\underbrace{\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)}_{=0}\mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^3) + \mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^4)$$

Puis $$\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)^2 = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{X}_{n+1}^4) = 1$$

Ainsi $$\mathbb{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) \leqslant 3n^2 + 6n + 1 \leqslant 3n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2$$

Par conséquent $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{S}_n^4) \leqslant 3n^2$$

On conclut $$\boxed{\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{S}_n| \geqslant a) \leqslant \frac{3n^2}{a^4}}$$

2.(b) Soit m entier $\geqslant 2$. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)) \leqslant \frac{3m^2}{m^3\ln(m)^4} = \frac{3}{m\ln(m)^4}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{m\geqslant 1} \mathbb{P}(|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m))$ converge. D'après l'inégalité de Boole, on a pour n entier non nul

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\left\{|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)\right\}\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty}\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)\right)$$

et le majorant est un reste de série convergente donc de limite nulle et par comparaison

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\left\{|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Or, par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{+\infty}\left\{|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\left\{|\mathrm{S}_m| \geqslant m^{3/4}\ln(m)\right\}\right)$$

On donc $\mathbb{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 0$ et on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1}$$

3. Soit k entier non nul. En reprenant la trame de la question précédente, on a

$$\mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_m| \geqslant \frac{1}{k}m^{3/4}\ln(m)\right) \leqslant \frac{k^4 3m^2}{m^3\ln(m)^4} = \frac{3k^4}{m\ln(m)^4}$$

terme de série convergente d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_k) = 1 \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{m=n}^{+\infty}\left\{|\mathrm{S}_m| < \frac{1}{k}m^{3/4}\ln(m)\right\}$$

et comme une intersection d'événements presque sûrs est un événement presque sûr, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\mathrm{A}_k\right) = 1$$

Enfin, on établit sans difficulté l'égalité

$$\left\{\frac{\mathrm{S}_n}{n^{3/4}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\mathrm{A}_k$$

Et on conclut $$\boxed{\frac{\mathrm{S}_n}{n^{3/4}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{presque sûrement}}$$

Exercice 8 (X 2025)

Soient k, m et n entiers non nuls. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^m$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle v_i, v_j\rangle \leqslant -\frac{1}{k}$$

Montrer $$n \leqslant k+1$$

2. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \dots, v_{k+1})$ de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^k$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, k+1]\!]^2 \qquad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{k}$$

Corrigé : 1. On a

$$0 \leqslant \|\sum_{i=1}^n u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle u_i, u_j \rangle \leqslant n - \frac{2}{k}\frac{n(n-1)}{2}$$

On en déduit $\boxed{n \leqslant k+1}$

2. On procède par analyse/synthèse. Soit $(v_1, \dots, v_{k+1})$ une famille de vecteurs qui convient. On trouve

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{G} \mathrm{P} = \mathrm{diag}(0, 1+1/k, \dots, 1+1/k)$$

On pose $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+1/k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{1+1/k} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{R}\mathrm{P}^\top$

On obtient alors

$$\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{R}^\top \mathrm{R} \mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}(0, 1+1/k, \dots, 1+1/k)\mathrm{P}^\top = \mathrm{G}$$

On choisit alors les vecteurs $(v_1, \dots, v_{k+1})$ de $\mathbb{R}^k$ tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_{k+1})$$

avec $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Sans difficulté, on trouve

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, k+1]\!]^2 \qquad \mathrm{G}_{i,j} = (\mathrm{A}^\top \mathrm{A})_{i,j} = \sum_{\ell=1}^k \langle v_i, e_\ell \rangle \langle v_j, e_\ell \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$$

avec la matrice G choisie pour répondre aux contraintes. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe une famille } (v_1, \dots, v_{k+1}) \text{ de vecteurs unitaires de } \mathbb{R}^k \text{ qui convient.}}$$

Exercice 9 (ENS 2025)

Soit n entier non nul. Un *chemin auto-évitant* de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite injective de points $a_0, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que $a_0 = (0,0)$ et $\|a_{i+1} - a_i\| = 1$ pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. On note c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n .

1. Montrer $\qquad \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad c_{m+n} \leqslant c_m c_n$

2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour n assez grand, on a

$$(2+\varepsilon)^n \leqslant c_n \leqslant (3-\varepsilon)^n$$

Corrigé : 1. Pour n entier non nul, on note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n.

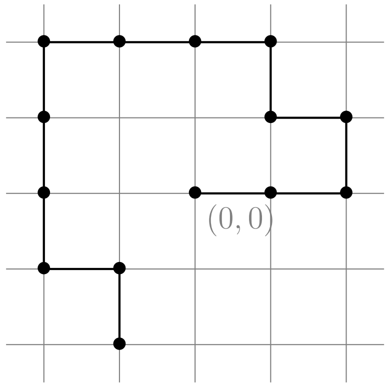

FIGURE 1 – Chemin auto-évitant dans $\mathbb{Z}^2$

Soient m et n entiers non nuls. On pose

$$\Phi\colon \begin{cases} \mathscr{C}_{n+m} & \longrightarrow \mathscr{C}_n \times \mathscr{C}_m \\ (a_0, \ldots, a_{n+m}) & \longmapsto ((a_0, \ldots, a_n), (0, \ldots, a_{n+m} - a_n)) \end{cases}$$

L'application est clairement bien définie et injective. On en déduit

$$\text{Card } \mathscr{C}_{n+m} \leqslant \text{Card } \mathscr{C}_n \times \text{Card } \mathscr{C}_m$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad c_{m+n} \leqslant c_m c_n}$$

2. Soit n entier non nul. On $(0, 1, \ldots, n) \in \mathscr{C}_n$ d'où $c_n > 0$. Ainsi

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \ln(c_{n+m}) \leqslant \ln(c_m) + \ln(c_n)$$

On montre le *lemme de Fekete* :

Lemme 1. *Soit $(u_n)_n$ suite à valeurs positives sous-additive, c'est-à-dire telle que*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

On a
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L} \quad \textit{avec} \quad \mathrm{L} = \inf \left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Démonstration. On établit

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_{km+r} \leqslant k u_m + u_r$$

On procède par récurrence. L'initialisation pour $k = 0$ est immédiate et l'hérédité découle directement du caractère sous-additif de la suite. L'ensemble $\left\{ \frac{u_k}{k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée (par zéro) et admet donc une borne inférieure finie. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure L, on dispose de m entier non nul tel que

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon$$

Soit n entier. On effectue la division euclidienne de n par m avec $n = qm + r$ et $r \in [\![0 \,;\, m-1]\!]$. D'après la première inégalité, on a

$$u_n = u_{qm+r} \leqslant q u_m + u_r$$

Puis, il vient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m}\frac{qm}{n} + \frac{u_r}{n} \leqslant (\mathrm{L} + \varepsilon)\frac{qm}{n} + \frac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon + \frac{\mathrm{M}}{n}$$

où $\mathrm{M} = \underset{0 \leqslant k \leqslant m-1}{\mathrm{Max}}\ u_k$. On a $\dfrac{\mathrm{M}}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et pour n assez grand, on obtient

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \mathrm{L} + 2\varepsilon$$

d'où le résultat. $\square$

La suite $(\ln(c_n))_{n \geqslant 1}$ est sous-additive et d'après le lemme de Fekete, on obtient la convergence de la suite $\left(\dfrac{\ln(c_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$. Soit n entier non nul. Un chemin $(a_0, \ldots, a_n)$ tel que $a_{i+1} - a_i \in \{(1,0), (0,1)\}$ pour $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ est clairement auto-évitant. On dispose de deux choix possibles pour chaque transition $a_{i+1} - a_i$ avec $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ ce qui implique qu'il existe au moins 2^n chemins auto-évitants de longueur n. Puis, étant donné un chemin auto-évitant $(a_0, \ldots, a_n)$, on dispose de 4 choix possibles pour $a_1 - a_0$ puis on dispose d'au plus 3 choix pour $a_{i+1} - a_i$ avec $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ puisqu'on ne doit pas avoir $a_{i+1} - a_i = -(a_i - a_{i-1})$ pour garantir l'injectivité. On en déduit qu'il existe au plus $4 \times 3^{n-1}$ chemins auto-évitants et on a donc l'encadrement

$$2^n \leqslant c_n \leqslant 4 \times 3^{n-1}$$

d'où
$$2 \leqslant c_n^{1/n} \leqslant 3 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Chaque terme admet une limite pour $n \to +\infty$ et il s'ensuit

$$2 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \mu \leqslant 3 \quad \text{avec} \quad \mu = \lim_{n \to +\infty} c_n^{1/n}$$

Il faut désormais affiner cet encadrement. On considère un chemin auto-évitant $(a_0, \ldots, a_{4n+1})$ avec n entier non nul et une séquence $(a_{4k+1}, \ldots, a_{4(k+1)+1})$ avec k entier. On a au plus 3^4 choix possibles pour cette séquence. Pour tous ces choix de portions de chemin, les trois étapes qui suivent $a_{4k+1} - a_{4k+2}$ ne doivent pas mener à réaliser un carré qui revient sur a_{4k+1}. Étant donné le choix de $a_{4k+1} - a_{4k+2}$ effectué, on a deux séquences qui réalisent un carré menant à a_{4k+1} ce qui fait donc au moins 3×2 portions de trajectoires interdites.

Figure 2 – Portions de trajectoires carrées interdites

Pour la séquence $(a_{4k+1}, \ldots, a_{4(k+1)+1})$, on a donc en réalité au plus $3^4 - 6 = 75$ choix possibles d'où

$$c_{4n+1} \leqslant 4 \times 75^n$$

Comme une suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite, on obtient

$$c_{4n+1}^{1/(4n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \leqslant \lim_{n \to +\infty} 75^{n/(4n+1)} = 75^{1/4}$$

et comme on a $75 < 81 = 3^4$, on en déduit $\mu < 3$. Considérons ensuite les trajectoires constituées de blocs formés de séquences verticales (éventuellement vide) soit vers le haut, soit vers le bas, et complétées par un dernier déplacement vers la droite, c'est-à-dire des blocs de la forme

$$\mathrm{E} \qquad \mathrm{N}^k\mathrm{E} \qquad \mathrm{S}^k\mathrm{E} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}$$

où $\mathrm{E} = (1,0)$, $\mathrm{N} = (0,1)$, $\mathrm{S} = (0,-1)$ et $\mathrm{N}^k\mathrm{E} = \underbrace{((0,1),\ldots,(0,1))}_{k \text{ termes}}(1,0)$ et de même pour $\mathrm{S}^k\mathrm{E}$.

Une concaténation de ces blocs forme clairement un chemin auto-évitant.

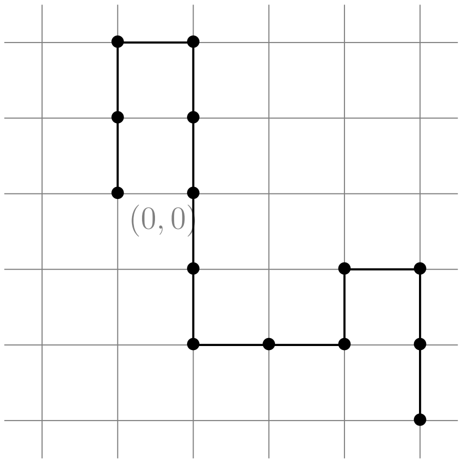

FIGURE 3 – Trajectoire orientale dans $\mathbb{Z}^2$

On note d_n le nombre de ces trajectoires *orientales* de longueur n avec n entier. Pour n entier, on considère une trajectoire orientale de taille $n+2$ et on distingue les cas en fonction des deux premières lettres :

— si la première lettre est un E, la trajectoire tronquée de cette première lettre est orientale et il y a donc d_{n+1} choix possibles ;
— si les deux premières lettres sont NE ou SE, alors la trajectoire tronquée de ces deux premières lettres est orientale et il y a d_n choix possibles pour chaque cas ;
— si les deux premières lettres sont NN ou SS, alors la trajectoire tronquée de sa première lettre est orientale de première lettre fixée ce qui fait donc $d_{n+1} - d_n$ choix possibles.

On en déduit $$d_{n+2} = d_{n+1} + 2d_n + d_{n+1} - d_n = 2d_{n+1} + d_n$$

La suite $(d_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre deux. On a $d_0 = 1$ (la trajectoire vide est orientale) et $d_1 = 1$ et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$$

Enfin, on a $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n^{1/n} \leqslant c_n^{\frac{1}{n}}$$

et faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$2 < 1 + \sqrt{2} \leqslant \mu$$

Ainsi, on a $$2 < \mu < 3$$

Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour n suffisament grand

$$2 + \varepsilon \leqslant c_n^{1/n} < 3 - \varepsilon$$

C'est-à-dire $$\boxed{(2+\varepsilon)^n \leqslant c_n \leqslant (3-\varepsilon)^n}$$