Exercice 1 (Mines 2024)

Soit x solution non nulle sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle

$$tx'' + x' + tx = 0$$

1. On pose $u(t) = \sqrt{t}x(t)$ pour $t > 0$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
2. Montrer $$\int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$$ avec $b > a > 0$ et v solution de $v'' + v = 0$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $t_a \in\,]\,a\,; a + \pi\,[$ tel que $x(t_a) = 0$.
4. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

Corrigé : 1. On a $$\forall t > 0 \qquad x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t)$$

La fonction u est deux fois dérivable comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par dérivation, il vient pour $t > 0$

$$x'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}u(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}u'(t)$$

et $$x''(t) = \frac{3}{4}\frac{1}{t^2\sqrt{t}}u(t) - \frac{1}{t\sqrt{t}}u'(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}u''(t)$$

et on trouve $$\begin{aligned} tx''(t) + x'(t) + tx(t) &= \sqrt{t}u''(t) + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{t\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right)u(t) \\ &= \sqrt{t}\left(u''(t) + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u(t)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{u'' + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u = 0}$$

2. Soient $b > a > 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall t > 0 \qquad \frac{u(t)}{4t^2} = -(u + u'')(t)$$

Il vient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t &= -\int_a^b (u''(t) + u(t))\,v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b u''(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [-u'(t)v(t)]_a^b + \int_a^b u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + [u(t)v'(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\int_a^b \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)}$$

3. Soit $a > 0$. On pose $$\forall t > 0 \qquad v(t) = \sin(t - a)$$

La fonction v est deux fois dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec $v'' + v = 0$ et les valeurs a et $a + \pi$ sont deux zéros consécutifs de v. Supposons que u ne s'annule pas sur $]\,a\,; a + \pi\,[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction u est de signe constant sur $]\,a\,;a+\pi\,[$. On peut supposer $u(t)>0$ pour tout $t\in\,]\,a\,;a+\pi\,[$. Par continuité, on a $u(a)\geqslant 0$ et $u(a+\pi)\geqslant 0$ et par dérivation

$$\forall t>0 \qquad v'(t)=\cos(t-a)$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\int_a^{a+\pi}\frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t &= (uv'-u'v)(a+\pi)-(uv'-u'v)(a)\\ &= -u(a+\pi)-u(a)\leqslant 0\end{aligned}$$

Or, l'intégrande $t\mapsto \dfrac{u(t)v(t)}{4t^2}$ est continue positif non nul d'où par séparation

$$\int_a^{a+\pi}\frac{u(t)v(t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t>0$$

ce qui contredit ce qui précède. On en déduit que la fonction u s'annule sur $]\,a\,;a+\pi\,[$ et de même pour x. On conclut

$$\boxed{\text{Pour tout } a>0,\text{ il existe } t_a\in\,]\,a\,;a+\pi\,[\text{ tel que } x(t_a)=0.}$$

4. Soit $r>0$. On pose
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n=\frac{r^{2n}}{4^n(n!)^2}$$

On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r^2}{4(n+1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge absolument d'où $\mathrm{R}\geqslant r$ et ceci vaut pour tout $r>0$ d'où $\mathrm{R}=+\infty$. Par dérivation de séries entières, on a

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad f'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}2n\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2} \qquad f''(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-1)\frac{(-1)^n t^{2(n-1)}}{4^n(n!)^2}$$

Après changement d'indice et linéarité du symbole somme, on obtient

$$\begin{aligned}tf''(t)+f'(t)+tf(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-1)\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}2n\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^n(n!)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{4^{n-1}((n-1)!)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n-1}(n-1)!}\left[\frac{2n(2n-1)}{4n^2}+\frac{2n}{4n^2}-1\right]t^{2n-1}=0\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation différentielle étudiée et d'après le résultat de la question 3, elle s'annule sur $]\,k\,;k+\pi\,[$ pour tout k entier. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ s'annule une infinité de fois.}}$$

Exercice 2 (Centrale 2023)

Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Rappeler les identités de polarisation et l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\exists c \in \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle f(x), f(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$;
   (b) $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \quad \langle x, y\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0$.
3. Trouver les $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset u(\mathrm{F})^\perp$ pour tout F sev de E.

Corrigé : 1. On a pour les identité de polarisation

$$\boxed{\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\end{aligned}}$$

et pour l'identité du parallélogramme

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

2. L'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est évidente. On suppose l'assertion (b) vraie. Soient u, v vecteurs unitaires de E. On a

$$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

Soit v vecteur unitaire de E. Pour $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\}$, posant $u = \dfrac{x}{\|x\|}$, on a d'après le résultat de la question précédente

$$\langle u+v, u-v\rangle = 0$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = 0$

et on a $\qquad \langle f(u+v), f(u-v)\rangle = \langle f(u) + f(v), f(u) - f(v)\rangle = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$

d'où $$\forall x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0_\mathrm{E}\} \qquad \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|f(v)\|$$

Ainsi $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \|f(v)\|\|x\|$$

l'égalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0_\mathrm{E}$. Notant $c = \|f(v)\|^2$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \|f(x)\| = \sqrt{c}\|x\|$$

et par polarisation, on en déduit l'assertion (a). On conclut

$$\boxed{\text{Les assertions } (a) \text{ et } (b) \text{ sont équivalentes.}}$$

3. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u(\mathrm{F}^\perp) \subset \mathrm{F}^\perp$ pour tout F sev de E. Ainsi, pour tout $a \in \mathrm{E}$, on a $u(\mathrm{Vect}\,(a)^\perp) \subset u(\mathrm{Vect}\,(a))^\perp$ ce qui signifie, en observant $u(\mathrm{Vect}\,(a)) = \mathrm{Vect}\,(u(a))$

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle x, a\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle u(x), u(a)\rangle = 0$$

et ceci vaut pour tout $a \in \mathrm{E}$. On en déduit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité. Réciproquement, on suppose que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité ou, de manière équivalente, qu'il existe c réel tel que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = c\,\langle x, y\rangle$$

Soit F sev de E et $x \in \mathrm{F}^{\perp}$. Alors, il vient

$$\forall y \in \mathrm{F} \qquad \langle u(x), u(y) \rangle = c \langle x, y \rangle = 0$$

ce qui prouve $u(x) \in u(\mathrm{F})^{\perp}$ d'où $u(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}$. On conclut

$$\boxed{\text{Les endomorphismes solutions sont ceux conservant l'orthogonalité.}}$$

Exercice 3 (Centrale 2019)

On pose
$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

1. Montrer que ζ est définie et continue sur $\mathrm{D}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}\,(z)>1\}$.
2. Soit $a\geqslant 0$ et $f\in\mathscr{C}^1([\,a\,;+\infty\,[\,,\mathbb{C})$. Montrer
$$\forall n\geqslant a\qquad\left|f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2}\,\underset{[\,n\,;n+1\,]}{\mathrm{Max}}\,|f'|$$
3. Montrer que $s\mapsto\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ est prolongeable par continuité sur $\mathrm{D}'=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}\,(z)>0\}$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad\forall(n,s)\in\mathbb{N}^*\times\mathrm{D}\qquad u_n(s)=\dfrac{1}{n^s}=\mathrm{e}^{-s\ln(n)}$

La fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{C}$, il s'ensuit que les fonctions u_n sont continues sur D. Soit $a>1$ et $\mathrm{D}_a=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}\,(z)>a\}$. On a
$$\forall(n,s)\in\mathbb{N}^*\times\mathrm{D}_a\qquad\left|\frac{1}{n^s}\right|=\frac{1}{n^{\mathrm{Re}\,(s)}}\leqslant\frac{1}{n^a}$$
Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement donc uniformément sur D_a pour tout $a>1$ donc sur tout compact de D et on conclut
$$\boxed{\text{La fonction }\zeta\text{ est définie continue sur D.}}$$
2. Soit $n\geqslant a$. Il vient par inégalité triangulaire
$$\left|f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_n^{n+1}[f(n)-f(t)]\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_n^{n+1}|f(n)-f(t)|\,\mathrm{d}t$$
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ donc sa dérivée f' atteint ses bornes sur tout segment inclus dans $[\,a\,;+\infty\,[$ et l'inégalité des accroissements finis donne
$$\forall t\in[\,n\,;n+1\,]\qquad|f(n)-f(t)|\leqslant\underset{[\,n\,;n+1\,]}{\mathrm{Max}}\,|f'|\,|n-t|=\underset{[\,n\,;n+1\,]}{\mathrm{Max}}\,|f'|\,(t-n)$$
Après intégration, on conclut
$$\boxed{\forall n\geqslant a\qquad\left|f(n)-\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{2}\,\underset{[\,n\,;n+1\,]}{\mathrm{Max}}\,|f'|}$$

3. Soit $s\in\mathbb{C}$. On pose $\qquad\forall t\geqslant 1\qquad f(t)=\dfrac{1}{t^s}$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ avec par dérivation
$$\forall t\geqslant 1\qquad f'(t)=-\frac{s}{t^{s+1}}$$
et on a
$$\forall t\geqslant 1\qquad|f(t)|=\frac{1}{t^{\mathrm{Re}\,(s)}}$$
d'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $s\in\mathrm{D}$ et on trouve
$$\forall s\in\mathrm{D}\qquad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}=\left[\frac{1}{(1-s)t^{s-1}}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{s-1}$$

Puis, pour $s \in \mathrm{D}$, par relation de Chasles puis linéarité du symbole somme car convergence

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

On pose $\qquad \forall (n,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{D}' \qquad f_n(s) = \dfrac{1}{n^s} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \quad$ et $\quad g_n(s) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$

Pour n entier non nul, procédons par continuité sous l'intégrale pour établir la continuité de g_n.

On rappelle que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$.
• Pour $s \in \mathrm{D}'$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s} = \mathrm{e}^{-s\ln(t)}$ est continue par morceaux sur $[\,n\,;n+1\,]$ par composition.
• Pour $t \in [\,n\,;n+1\,]$, la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{t^s} = \mathrm{e}^{-s\ln(t)}$ est continue sur D' comme composée de telles fonctions.

•**Domination :** soit $a > 0$. On a

$$\forall (s,t) \in \mathrm{D}_a \times [\,n\,;n+1\,] \qquad \left|\frac{1}{t^s}\right| = \frac{1}{t^{\mathrm{Re}\,(s)}} \leqslant \frac{1}{t^a}$$

et la dominante $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$ est clairement intégrable sur le segment $[\,n\,;n+1\,]$. Par continuité sous l'intégrale, la fonction g_n est continue sur D_a pour tout $a > 0$ et donc sur D' et il s'ensuit que les f_n sont continues.

Soit K un compact de D'. On dispose de $0 < a < b$ tels que

$$\forall s \in \mathrm{K} \qquad a \leqslant \mathrm{Re}\,(s) \leqslant b$$

D'après le résultat de la question précédente, il vient pour n entier non nul et $s \in \mathrm{K}$

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'|$$

On trouve

$$\operatorname*{Max}_{[\,n\,;n+1\,]} |f'| = \operatorname*{Max}_{t \in [\,n\,;n+1\,]} \left| \frac{s}{t^{s+1}} \right| = \frac{\mathrm{Re}\ s}{n^{\mathrm{Re}\,(s)+1}} \leqslant \frac{b}{n^{a+1}}$$

Alors, par critère de Riemann, la série de fonctions continues $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout compact de D' et comme la somme coïncide avec $s \mapsto \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ sur D, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathrm{D}'.}$$

Exercice 4 (Centrale 2023)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On note $\rho(\mathrm{A}) = \operatorname*{Max}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})} |\lambda|$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt[n]{|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)|}$$

1. Si $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ est un singleton, montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(\mathrm{A})$.
2. Donner un exemple de matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.
3. On suppose que la matrice A admet au moins deux valeurs propres distinctes.
   (a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_n$.
   (b) Montrer que $\rho(\mathrm{A})$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. Comme χ_{A} est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on dispose de P dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \lambda\mathrm{I}_d + \mathrm{T}$ avec λ complexe et T triangulaire supérieure stricte. Il s'ensuit que pour n entier, on a

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P} = \lambda^n\mathrm{I}_d + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \text{ triangulaire supérieure stricte}$$

d'où
$$|\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n)| = |\mathrm{Tr}\,(\lambda^n\mathrm{I}_d)| = |\lambda|^n\, d$$

Ainsi
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = |\lambda|\,\sqrt[n]{d} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\lambda| = \rho(\mathrm{A})}$$

2. On choisit $\mathrm{A} = \mathrm{R}\,(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}^{2n} = \mathrm{R}(\pi n) = (-1)^n\mathrm{I}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{2n+1} = \mathrm{R}(\pi n)\mathrm{A} = (-1)^n\mathrm{A}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{2n} = \sqrt[2n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 0$$

Ainsi
$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas.}}$$

3.(a) La suite $(z^n)_n$ est à valeurs dans le compact $\mathbb{U}$ en tant que fermé borné de $\mathbb{C}$. On dispose de φ extractrice telle que

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad \theta \text{ réel}$$

On pose définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n)+1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1)}_{\geqslant 1} + \psi(n) > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $\left(\psi(n+1) - \psi(n)\right)_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ avec $\left(\psi(n)\right)_n$ sous-suite $\left(\varphi(n)\right)_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1)-\psi(n)} = z^{\psi(n+1)}\overline{z^{\psi}(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$$

On conclut
$$\boxed{\text{La suite } (z^n)_n \text{ admet 1 comme valeur d'adhérence.}}$$

3.(b) On a nécessairement $\rho(\mathrm{A}) > 0$ puisque la matrice A admet au moins deux valeurs propres distinctes. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives $m_0, \ldots, m_p$ avec $\rho(\mathrm{A}) = |\lambda_0|$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{Tr}(\mathrm{A}^n) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{p} m_k z_k^n \right) \quad \text{avec} \quad z_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_0}$$

Soit $s \in [\![0\,;\, p]\!]$ tel que $|z_i| < 1$ pour $i \in [\![s+1\,;\, p]\!]$. Ainsi, on a

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{A}^n) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{s} m_k z_k^n + \mathrm{o}(1) \right)$$

La suite $(z_1^n, \ldots, z_s^n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{U}^s$, compact comme produit fini de compacts. On dispose donc φ extractrice telle que

$$\forall k \in [\![1\,;\, s]\!] \qquad z_k^{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta_k} \quad \text{avec} \quad \theta_k \text{ réel}$$

En procédant comme à la question 3.(a), on construit une extractrice ψ, définie uniquement à partir de φ, telle que $\chi = \psi(\cdot+1) - \psi$ est une extractrice et vérifiant

$$\forall k \in [\![1\,;\, s]\!] \qquad z_k^{\chi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Ainsi
$$\operatorname{Tr}(\mathrm{A}^{\chi(n)}) = \lambda_0^n \left(m_0 + \sum_{k=1}^{s} m_k + \mathrm{o}(1) \right)$$

d'où
$$u_{\chi(n)} = \rho(\mathrm{A}) \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{s} m_k + \mathrm{o}(1)}$$

On conclut $\boxed{\text{Le rayon spectral } \rho(\mathrm{A}) \text{ est valeur d'adhérence de la suite } (u_n)_{n\geqslant 1}.}$

Exercice 5 (Mines 2024)

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telles que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est $+\infty$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{T}(f) : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

1. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et déterminer ses valeurs propres.
3. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{T} \oplus \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$ et que $\mathrm{Im}\ \mathrm{T}$ est un idéal de E.

Corrigé : 1. On a $t \mapsto 1 \in \mathrm{E}$ et l'ensemble E est stable par combinaison linéaire par stabilité de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et des séries entières de rayon de convergence $+\infty$. Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Le produit fg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que produit de telles fonctions. D'après la formule de Leibniz, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

D'après le théorème du produit de Cauchy de séries entières, la série de Taylor $\sum \dfrac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence $+\infty$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble E est une sous-algèbre de } \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}).}$$

2. Par linéarité de la dérivation et linéarité du symbole somme en cas de convergence, l'application T est linéaire. Une somme de série entière étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, l'application T est à valeurs dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et par dérivation de série entière, il vient pour $f \in \mathrm{E}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}(f)^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - f^{(n)}(0) = 0$$

La série entière $\sum \dfrac{\mathrm{T}(f)^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est simplement la série entière nulle donc de rayon $+\infty$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{T}(f) = \lambda f$. Si $\lambda = 0$, alors $\mathrm{T}(f) = 0$ signifie que la fonction f coincide avec sa série de Taylor, autrement dit la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Supposons $\lambda \neq 0$. Par dérivation, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{T}(f)^{(n)}(f)(0) = 0 = \lambda f^{(n)}(0)$$

On en déduit $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n entier d'où $\mathrm{T}(f) = f$. La fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un tel vecteur propre de T.

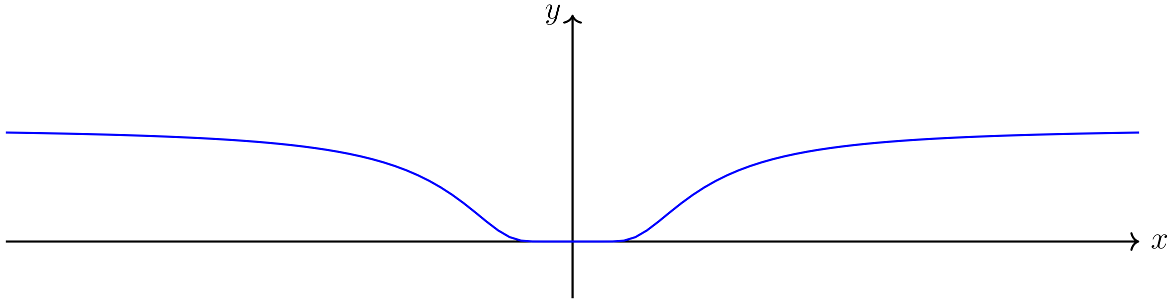

Figure 1 – Graphe de f, fonction plate en 0

Par récurrence, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$$

Ainsi
$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

On conclut
$$\boxed{\text{Les valeurs propres de T sont 0 et 1.}}$$

3. On a vu précédemment que pour $f \in \mathrm{E}$, la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{T}(f)^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est nulle. Il en résulte que $\mathrm{T}^2(f) = \mathrm{T}(f)$ pour $f \in \mathrm{E}$ ce qui prouve que T est un projecteur et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \mathrm{T} \oplus \operatorname{Im} \mathrm{T}}$$

Le sev Im T est en particulier un sous-groupe additif de E. Vérifions la propriété d'absorption. Soit $(f, g) \in \operatorname{Im} \mathrm{T} \times \mathrm{E}$. Le produit fg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\operatorname{Im} \mathrm{T} = \operatorname{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ d'où $f = \mathrm{T}(f)$ et par conséquent $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n entier. D'après la formule de Leibniz, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{f^{(k)}(0)}_{=0} g^{(n-k)}(0) = 0$$

Il en résulte que $fg = \mathrm{T}(fg) \in \operatorname{Im} \mathrm{T}$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble Im T est un idéal de E.}}$$

Variante : On peut aussi établir que $\mathrm{T} - \mathrm{id}$ est un morphisme d'algèbres. Vérifions juste le transport de la loi produit. Pour $(f, g) \in \mathrm{E}^2$, on a pour t réel

$$\begin{aligned} (\mathrm{T} - \mathrm{id})(fg)(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) t^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n \right) = \mathrm{T}(f)(t)\mathrm{T}(g)(t) \end{aligned}$$

d'après le théorème du produit de Cauchy de séries entières. On en déduit que $\mathrm{T} - \mathrm{id}$ est un morphisme d'algèbres d'où $\operatorname{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ idéal de E et le résultat suit avec $\operatorname{Im} \mathrm{T} = \operatorname{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ puisque T est un projecteur.

Exercice 6 (CCINP 2025)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $\mathrm{M} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,; +\infty\,[\qquad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_n$ est bornée.

   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

   On admettra dans la suite de l'exercice que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$.

2. (a) Justifier que pour tout n entier, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver
$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Corrigé : Exercice 49 CCPINP 2025

Exercice 7 (CCINP 2024)

Soit n entier non nul. On pose

$$\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{N}\right)$$

1. Montrer que $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$, établir $\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant n$.
3. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$.
4. Pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $\mathrm{Tr}\left((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^2)$.

Corrigé : 1. Pour $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a'_{j,i}b_{i,j}$ avec $\mathrm{A}^\top = \left(a'_{i,j}\right)$. D'où

$$\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}$$

expression symétrique en les coefficients d'où la symétrie de l'application. On en déduit sans difficulté qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie et positive et on conclut

$$\boxed{\text{L'application } (\mathrm{M},\mathrm{N}) \mapsto \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant \|\mathrm{M}\|\|\mathrm{N}\|$$

avec

$$\|\mathrm{M}\|^2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$$

et de même pour N. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \langle \mathrm{M},\mathrm{N}\rangle \leqslant n}$$

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$. On pose $\mathrm{C} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. On observe $\mathrm{C} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tel que $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$. On multiplie par $\bar{\mathrm{X}}^\top$ à gauche et on trouve $\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{CX} = \lambda\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. Puis, on conjugue et transpose l'égalité $\mathrm{CX} = \lambda\mathrm{X}$ et on multiplie à droite par X pour obtenir $-\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{CX} = \bar{\lambda}\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X}$. En additionnant les deux égalités obtenues, il vient

$$(\lambda+\bar{\lambda})\bar{\mathrm{X}}^\top\mathrm{X} = (\lambda+\bar{\lambda})\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}_{>0} = 0$$

notant x_i les coordonnées de X dont l'une au moins n'est pas nulle. On en déduit $\lambda+\bar{\lambda} = 0$ d'où $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. La matrice C^2 est clairement symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral et $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{C}^2) \subset\,]-\infty\,;0]$ d'après ce qui précède. Il s'ensuit $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{C}^2) \leqslant 0$, autrement dit

$$\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2 - 2\mathrm{AB}^2\mathrm{A} + (\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) - 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}) + \mathrm{Tr}\,((\mathrm{BA})^2) \leqslant 0$$

D'après la propriété fondamentale de la trace, on a $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$ et par invariance de la transposition $\mathrm{Tr}\,((\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2)$. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)}$$

4. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les propriétés de la trace mentionnées ci-avant, il vient

$$\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2) = \mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2 + 2\mathrm{AB}^2\mathrm{A} + (\mathrm{BA})^2) = 2\,\mathrm{Tr}\,((\mathrm{AB})^2) + 2\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$$

et avec l'inégalité précédente, il vient

$$\mathrm{Tr}\left((\mathrm{AB}+\mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2) = \langle \mathrm{A}^2, \mathrm{B}^2 \rangle \leqslant \|\mathrm{A}^2\| \|\mathrm{B}^2\|$$

On dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ d'où $\mathrm{A}^2 = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^\top$ et $\mathrm{A}^4 = \mathrm{PD}^4\mathrm{P}^\top$. Ainsi

$$\|\mathrm{A}^2\|^2 = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^4) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^2$$

ce qui prouve $$\|\mathrm{A}^2\| \leqslant \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)$$

et de même pour B. On conclut

$$\boxed{\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2 \qquad \mathrm{Tr}\,\left((\mathrm{AB} + \mathrm{BA})^2\right) \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^2)\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}^2)}$$

Exercice 8 (Centrale 2023, X 2019)

Soit $(\mathrm{G},\star)$ un groupe fini d'ordre n. On note $\widehat{\mathrm{G}}$ l'ensemble des morphismes de $(\mathrm{G},\star)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G. Que peut-on dire de l'ordre de $g \in \mathrm{G}$?
   (b) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}}$, préciser les valeurs possibles pour $\varphi(g)$ avec $g \in \mathrm{G}$.
   (c) Montrer que l'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est fini. On note $\widehat{n}$ son cardinal.
2. (a) Pour $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$, montrer $\sum\limits_{g\in\mathrm{G}} \varphi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$.
   (c) En déduire $\widehat{n} \leqslant n$.
   (d) Si le groupe $(\mathrm{G},\star)$ est cyclique, établir $\widehat{n} = n$.
3. On suppose $(\mathrm{G},+)$ abélien fini.
   (a) Pour $x \in \mathrm{G}$, on note $\delta_x : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(x)$. Vérifier que $\delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ pour $x \in \mathrm{G}$ puis établir que l'application $\Phi : \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, x \mapsto \delta_x$ est un isomorphisme.
   (b) En déduire $\widehat{n}$.

Corrigé : 1.(a) Soit $g \in \mathrm{G}$. L'ordre de g noté $o(g)$ est le plus petit entier k non nul tel que $g^k = e$. On a $o(g)|n$.

1.(b) Soit $g \in \mathrm{G}$. On a
$$\varphi(g^n) = \varphi(e) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(g^n) = \varphi(g)^n$$
D'où
$$\boxed{\forall g \in \mathrm{G} \qquad \varphi(g) \in \mathbb{U}_n}$$
1.(c) On a $\widehat{\mathrm{G}} \subset \mathbb{U}_n^{\mathrm{G}}$ avec G et $\mathbb{U}_n$ des ensembles finis. Par conséquent
$$\boxed{\text{L'ensemble } \widehat{\mathrm{G}} \text{ est fini.}}$$
Remarque : L'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ est appelé *dual* de G et les éléments de $\widehat{\mathrm{G}}$ sont appelés *caractères* de G.

2.(a) Soit $\varphi \in \widehat{\mathrm{G}} \setminus \{\mathbb{1}\}$. On dispose de $a \in \mathrm{G}$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $\mathrm{G} \to \mathrm{G}, g \mapsto a \star g$ réalise une permutation de G et il vient
$$\sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(g) = \sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(a\star g) = \sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(a)\varphi(g)$$
d'où
$$(1-\varphi(a))\sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(g) = 0$$
On conclut
$$\boxed{\sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(g) = 0}$$
2.(b) Observons en premier lieu que l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ possède bien une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Le groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ étant commutatif, on vérifie sans difficulté que $(\widehat{\mathrm{G}},\times)$ possède une structure de groupe (la loi $\times$ est bien une loi interne à $\widehat{\mathrm{G}}$ et tout le reste suit). Soit $(\alpha_\varphi)_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}}$ famille de complexes telle que $\sum\limits_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi\varphi = 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$. Soit $\psi \in \widehat{\mathrm{G}}$. Il vient
$$\sum_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}} \alpha_\varphi\varphi\psi^{-1} = 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$$

d'où
$$\sum_{g\in\mathrm{G}}\left(\sum_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}}\alpha_\varphi\varphi\psi^{-1}\right)=0$$

et en permutant l'ordre de sommation, il vient
$$\sum_{\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}}\alpha_\varphi\left(\sum_{g\in\mathrm{G}}\varphi\psi^{-1}(g)\right)=n\alpha_\psi=0$$

On conclut
$$\boxed{\text{La famille } \widehat{\mathrm{G}} \text{ est une partie libre de } \mathbb{C}^{\mathrm{G}}.}$$

2.(c) Soit $\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}$. On a
$$\varphi=\sum_{g\in\mathrm{G}}\varphi(g)\mathbb{1}_{\{g\}}$$

ce qui prouve que la famille $\left\{\mathbb{1}_{\{g\}}\right\}_{g\in\mathrm{G}}$ est génératrice de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$. Il s'ensuit que $\dim\mathbb{C}^{\mathrm{G}}\leqslant n$ et comme la famille $\widehat{\mathrm{G}}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$, on conclut
$$\boxed{\widehat{n}\leqslant n}$$

2.(d) Soit $g\in\mathrm{G}$ tel que $\mathrm{G}=\langle g\rangle=\{kg,k\in\mathbb{Z}\}$ et soit $\varphi\in\widehat{\mathrm{G}}$. On a $\varphi(g)\in\mathbb{U}_n$ d'où $\varphi(g)=\omega^\ell$ avec $\omega=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et $\ell\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. Il en résulte que
$$\forall k\in\mathbb{Z}\qquad \varphi(kg)=\varphi(g)^k=\omega^{k\ell}$$

On pose
$$\forall\ell\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]\qquad \chi_\ell\colon\begin{cases}\mathrm{G}\longrightarrow\mathbb{C}\\ kg,\ k\in\mathbb{Z}\longmapsto\omega^{\ell k}\end{cases}$$

Soit $\ell\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. L'application χ_ℓ est bien définie. En effet, soit $(k,k')\in\mathbb{Z}^2$ tel que $kg=k'g$. On a $(k-k')g=0$ d'où $n|(k-k')$ ce qui prouve $k=k'+nq$ avec $q\in\mathbb{Z}$ et il vient
$$\omega^{k\ell}=\omega^{(k'+nq)\ell}=\omega^{k'\ell}\omega^{nq\ell}=\omega^{k'\ell}$$

De plus, c'est un élément de $\widehat{\mathrm{G}}$ puisque
$$\forall(k,k')\in\mathbb{Z}^2\qquad \chi_\ell(kg+k'g)=\chi_\ell((k+k')g)=\omega^{\ell(k+k')}=\omega^{\ell k}\omega^{\ell k'}=\chi_\ell(k)\chi_\ell(k')$$

Ainsi, on a
$$\widehat{\mathrm{G}}=\{\chi_\ell,\ell\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]\}$$

Pour $(\ell,j)\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]^2$, on a
$$\begin{aligned}\chi_j=\chi_\ell\quad&\Longrightarrow\quad\chi_j(1)=\chi_\ell(1)\\&\Longrightarrow\quad\omega^{j-\ell}=1\quad\Longrightarrow\quad j-\ell\in n\mathbb{Z}\cap[\![-(n-1)\,;\,n-1\,]\!]\quad\Longrightarrow\quad j=\ell\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\widehat{n}=\mathrm{Card}\,\{\chi_\ell,\ell\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]\}=n}$$

Remarque : On peut montrer $\mathrm{G}\simeq\widehat{\mathrm{G}}$ en vérifiant que l'application
$$\Psi\colon\begin{cases}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\longrightarrow\widehat{\mathrm{G}}\\ \quad\bar{j}\quad\longmapsto\chi_j\end{cases}$$

où $j\in\bar{j}\cap[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$ est un isomorphisme de groupes. L'application est bien définie car χ_j ne dépend pas du choix d'un représentant de $\bar{j}$ puisque
$$\forall k\in\mathbb{Z}\qquad \chi_{j+k\ell}=\chi_j$$

Elle est clairement surjective et injective puisque pour $j\in\mathbb{Z}$, on a $\chi_j=\mathbb{1}$ implique $\omega^j=1$ qui implique $\bar{j}=\bar{0}$. Enfin, on a

$$\forall (j,\ell) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \Psi(\bar{\ell} + \bar{j}) = \Psi(\overline{j+\ell}) = \chi_{j+\ell} = \chi_j \chi_\ell$$

Ainsi
$$\widehat{\mathrm{G}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathrm{G}$$

3.(a) La notation $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ a du sens puisque c'est l'ensemble des morphismes du groupe $(\widehat{\mathrm{G}}, \times)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. L'ensemble $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ est appelé *bidual* de G. Soit $x \in \mathrm{G}$ et $(\varphi, \chi) \in \widehat{\mathrm{G}}^2$. On a

$$\delta_x(\chi\varphi) = (\chi\varphi)(x) = \chi(x)\varphi(x) = \delta_x(\chi)\delta_x(\varphi)$$

D'où
$$\boxed{\forall x \in \mathrm{G} \qquad \delta_x \in \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}}$$

Soit $(x,y) \in \mathrm{G}^2$. On a

$$\forall \chi \in \widehat{\mathrm{G}} \qquad \Phi(x+y)(\chi) = \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) = \Phi(x)(\chi)\Phi(y)(\chi)$$

d'où
$$\forall (x,y,) \in \mathrm{G}^2 \qquad \Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y)$$

On note $\widehat{\widehat{n}} = \mathrm{Card}\ \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$. D'après le résultat de la question 2.(c), on a

$$\widehat{\widehat{n}} \leqslant \widehat{n} \leqslant n$$

Si on établit l'injectivité de Φ, on pourra en déduire $n \leqslant \widehat{\widehat{n}}$ et conclure. On a

$$\Phi \text{ injectif} \iff \mathrm{Ker}\ \Phi = \{0_\mathrm{G}\}$$

Soit $x \in \mathrm{G} \setminus \{0_\mathrm{G}\}$. On note $d = o(x)$. L'application

$$\chi \colon \begin{cases} \langle x \rangle & \longrightarrow \mathbb{C} \\ kx, k \in \mathbb{Z} & \longmapsto \omega^k \end{cases}$$

avec $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{d}}$ est un morphisme de $(\langle x \rangle, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$ pour les mêmes raisons que les morphismes χ_ℓ exhibés à la question 2.(d) avec $\ell \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$ et c'est un morphisme non trivial puisque $\chi(x) = \omega \neq 1$. Si $d = n$, c'est-à-dire $\mathrm{G} = \langle x \rangle$, c'est terminé. Supposons $\mathrm{H} = \langle x \rangle \subsetneq \mathrm{G}$. Soit $y \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{H}$. On note $\mathrm{K} = \langle \mathrm{H} \cup \{y\} \rangle$. On montre sans difficulté

$$\mathrm{K} = \{h + ky, (h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}\}$$

On pose
$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in \mathrm{H}\}$$

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid ky \in \mathrm{H}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ puisque $ny = 0_\mathrm{G} \in \mathrm{H}$ et l'entier p est donc bien défini. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^p = \chi(py)$. On définit

$$\forall (h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z} \qquad \widetilde{\chi}(h + ky) = \chi(h)z^k$$

On va vérifier que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie et qu'il s'agit bien d'un élément de $\widehat{\mathrm{K}}$ prolongeant $\chi \in \widehat{\mathrm{H}}$. Soit $(h,k) \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}$ et $(h',k') \in \mathrm{H} \times \mathbb{Z}$ tels que $h + ky = h' + k'y$. On a $h - h' = (k'-k)y$. D'après le théorème de la divisions euclidienne, on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$ tels que $k' - k = pq + r$. Ainsi, il vient

$$\underbrace{h - h' - pqy}_{\in \mathrm{H}} = ry$$

Par minimalité de p, il en résulte que $r = 0$ d'où

$$k' = k + pq \quad \text{et} \quad h' = h - pqy$$

Ainsi
$$\chi(h')z^{k'} = \chi(h - pqy)z^{k+pq} = \chi(h)z^{-pq}z^{pq}z^k = \chi(h)z^k$$

ce qui prouve que l'application $\widetilde{\chi}$ est bien définie. Sans difficulté, il vient alors pour (h, k) et (h', k') dans $\mathrm{H} \times \mathbb{Z}$

$$\widetilde{\chi}(h+ky+h'+k'y) = \widetilde{\chi}(h+h'+(k+k')y) = \chi(h+h')z^{k+k'} = \chi(h)z^j\chi(h')z^{k'} = \widetilde{\chi}(h+ky)\widetilde{\chi}(h'+k'y)$$

Par conséquent, on a bien prolongé le morphisme non trivial $\chi \in \widehat{\mathrm{H}}$ en le morphisme également non trivial $\widetilde{\chi} \in \widehat{\mathrm{K}}$. On itère ce processus jusqu'à prolonger χ en morphisme non trivial sur G tout entier et on conclut que l'application Φ est injective. On en déduit $n \leqslant \widehat{\widehat{n}}$ et par conséquent, on a $n = \widehat{\widehat{n}}$ et l'application Φ est donc injective entre deux ensembles finis de même cardinal ce qui prouve qu'elle est bijective. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un isomorphisme de } (\mathrm{G}, +) \text{ vers } (\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}, \times).}$$

3.(b) On a montré précédemment $\widehat{\widehat{n}} \leqslant \widehat{n} \leqslant n$ et comme $\widehat{\widehat{n}} = n$, on conclut

$$\boxed{n = \widehat{n}}$$

Variante : On peut montrer ce résultat directement, sans passer par le bidual $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$. Pour $a \in \mathrm{G}$, on pose

$$\forall \chi \in \widehat{\mathrm{G}} \qquad \mathrm{T}_a(\chi) = \chi(\cdot + a)$$

Pour $a \in \mathrm{G}$, l'application T_a à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ est linéaire et bijective d'application réciproque T_{-a}. On pose

$$\Gamma\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{G}}) \\ a \longmapsto \mathrm{T}_a \end{cases}$$

On observe $\qquad \forall (a, b) \in \mathrm{G}^2 \qquad \Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b) = \mathrm{T}_a \circ \mathrm{T}_b = \mathrm{T}_b \circ \mathrm{T}_a$

On en déduit $\qquad \forall a \in \mathrm{G} \qquad \mathrm{T}_a^n = \Phi(na) = \Phi(0_{\mathrm{G}}) = \mathrm{id}$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ est annulateur de T_a pour tout $a \in \mathrm{G}$. Comme il s'agit d'un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on en déduit que la famille $(\mathrm{T}_a)_{a \in \mathrm{G}}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ qui commutent. D'après un résultat classique de réduction, il existe une base commune de $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ formée de vecteurs propres des T_a pour $a \in \mathrm{G}$. Soit u un tel vecteur propre. On a $\mathrm{T}_a(u) = \lambda(a)u$ pour tout $a \in \mathrm{G}$ d'où

$$\forall (a, x) \in \mathrm{G}^2 \qquad \mathrm{T}_a(u)(x) = \lambda(a)u(x) = u(x + a)$$

S'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $u(g) = 0$, comme $u \neq 0_{\mathbb{C}^{\mathrm{G}}}$, on dispose de $h \in \mathrm{G}$ tel que $u(h) \neq 0$ et il vient

$$0 = \lambda(h - g)u(g) = u(h) \neq 0$$

ce qui est absurde. On en déduit que l'application u ne s'annule pas sur u. Enfin pour $(a, b) \in \mathrm{G}^2$, on a

$$\mathrm{T}_{a+b}(u) = \lambda(a+b)u \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{a+b}(u) = u(\cdot + a + b) = \lambda(a)u(\cdot + b) = \lambda(a)\lambda(b)u$$

d'où $$\lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b)$$

qu'on peut encore écrire $$\frac{u(a+b)}{u(0)} = \frac{u(a)}{u(0)}\frac{u(b)}{u(0)}$$

et qui prouve que $\chi = \dfrac{u}{u(0)}$ est un caractère. Par conséquent, on dispose d'une famille libre de caractères de cardinal égal à $\dim \mathbb{C}^{\mathrm{G}}$. Enfin, la famille $\left(\mathbb{1}_{\{g\}}\right)_{g \in \mathrm{G}}$ est une famille libre et génératrice $\mathbb{C}^{\mathrm{G}}$ d'où $\dim \mathbb{C}^{\mathrm{G}} = \mathrm{Card}\ \mathrm{G} = n$. Ainsi, on a $\widehat{n} \geqslant n$ et on retrouve donc l'égalité $n = \widehat{n}$.

Exercice 9 (Mines-Telecom 2024)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension égale à n et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. On suppose u nilpotent. Prouver que $u^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
2. On suppose $u^n = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{A}$ avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre l'équation $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Corrigé : 1. Voir cours.

2. Supposons le problème résolu. Il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $u(\varepsilon_i) = \varepsilon_{i-1}$ pour $i \in [\![2\,;\, n]\!]$ et $u(\varepsilon_1) = 0$, autrement dit $\varepsilon_i = u^{n-i}(\varepsilon_n)$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Il suffit alors de choisir $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. La famille $(u^{n-1}(x), \dots, x)$ est libre. En effet, soit $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille de scalaires tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$. On suppose les α_k non tous nuls et on pose $p = \min\{k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$. On a

$$u^{n-p-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x)\right) = \alpha_p u^{n-1}(x) + 0_{\mathrm{E}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_p = 0$$

ce qui est en contradiction avec le choix de p. Ainsi

$$\boxed{\exists \mathscr{B} \text{ base de E} \quad | \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{A}}$$

3. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ solution de $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$. Alors $\mathrm{X}^{2n} = \mathrm{A}^n = 0$ d'où X nilpotente et $\mathrm{X}^{2(n-1)} = \mathrm{A}^{n-1} \neq 0$. Or, on a $2(n-1) < n \iff n < 2$ donc si l'espace E est de dimension $\geqslant 2$, il n'y a pas de solution.

Exercice 10 (Mines-Telecom 2024)

On pose $$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

1. Déterminer I le domaine de définition de f.
2. Montrer $f\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x\to 0$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\qquad f_n(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

Pour $x>0$, on a $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées d'où la convergence simple de $\sum f_n$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x\leqslant 0$, on a $f_n(x)\geqslant 1$ d'où la divergence grossière de $\sum f_n$ sur $]\,-\infty\,;0\,]$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathrm{I}=]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Pour n entier, on a $f_n\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathrm{I},\mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve pour n et k entiers

$$\forall x>0\qquad f_n^{(k)}(x)=\left(-\sqrt{n}\right)^k\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Ainsi, pour $a>0$, on obtient

$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[}=n^{\frac{k}{2}}\mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

par croissances comparées. On en déduit la convergence normale donc uniforme de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour tout $a>0$ pour tout k entier. On en déduit

$$\boxed{f\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathrm{I},\mathbb{R})}$$

3. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, on a

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad\int_k^{k+1}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\quad\text{et}\quad\forall k\geqslant 1\qquad\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\leqslant\int_{k-1}^{k}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

D'où, après une sommation adéquat, intégrale et somme étant de même nature

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\leqslant 1+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

et on trouve $$\forall x>0\qquad\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{x^2}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{S}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{2}{x^2}}$$

Exercice 11 (Centrale 2017)

On pose $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{E}_n = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant n^2\} \quad$ et $\quad u_n = \dfrac{4 \operatorname{Card} \mathrm{E}_n}{(2n+1)^2}$

1. Tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_n$. Faire une conjecture sur sa limite.
2. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n = 1 + 4n + 4 \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++}$

   avec $\mathrm{E}_n^{++} = \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^{*2} \mid x^2+y^2 \leqslant n^2\right\}$.
3. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} = \sum\limits_{x=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2-x^2} \right\rfloor$
4. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum\limits_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2-x^2} - n + 1 \leqslant \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} \leqslant \sum\limits_{x=1}^{n} \sqrt{n^2-x^2}$

   On pose à présent $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{x=1}^{n} \sqrt{n^2-x^2}$
5. Tracer les 50 premiers termes de la suite $(v_n)_n$.
6. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.
7. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

   Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i \geqslant 1}$, $(\mathrm{Y}_i)_{i \geqslant 1}$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket -n\,;\,n \rrbracket$. On note $\mathrm{Z}_k = \mathbb{1}_{\mathrm{E}_n}((\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k))$ pour k entier non nul et $\mathrm{S}_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \mathrm{Z}_k$ pour p entier non nul.
8. Quelle est la loi de S_p avec p entier non nul ?
9. Retrouver par simulation le résultat obtenu sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def u(n):
    res=0
    for x in range(-n,n+1):
        for y in range(-n,n+1):
            if x**2+y**2<=n**2:
                res+=1
    return 4*res/(2*n+1)**2

tn=range(1,51)
tu=[u(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tu)
plt.grid();plt.show()
```

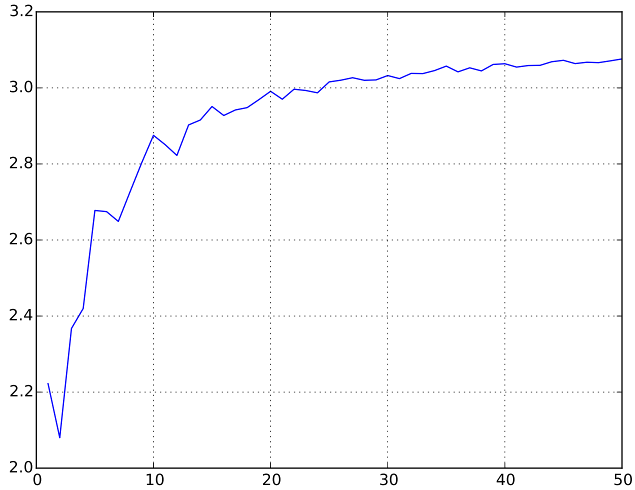

Figure 2 – Tracé de la suite $(u_n)_n$

On conjecture
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi}$$

2. Il suffit de compter séparément l'origine $(0,0)$, les points de E_n sur les axes et chaque quart compris strictement entre axes des abscisses et des ordonnées pour obtenir

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n = 1 + 4n + 4 \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++}}$$

3. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}_n^{++}$. Pour x fixé dans $[\![1\,; n]\!]$, on a $y^2 \leqslant n^2 - x^2$ d'où $y \leqslant \sqrt{n^2 - x^2}$ et y est un entier d'où $y \in [\![1\,; \lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \rfloor]\!]$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} = \sum_{x=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor}$$

4. On a
$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad u - 1 \leqslant \lfloor u \rfloor \leqslant u$$

La majoration attendue est immédiate et pour la minoration, il suffit d'observer que $\operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} = \sum_{x=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor$ puis sommer. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2} - n + 1 \leqslant \operatorname{Card} \mathrm{E}_n^{++} \leqslant \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2 - x^2}}$$

5. On saisit :

```
def v(n):
    return sum([np.sqrt(n**2-x**2) for x in range(1,n+1)])/n**2

tv=[v(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tv)
plt.grid();plt.show()
```

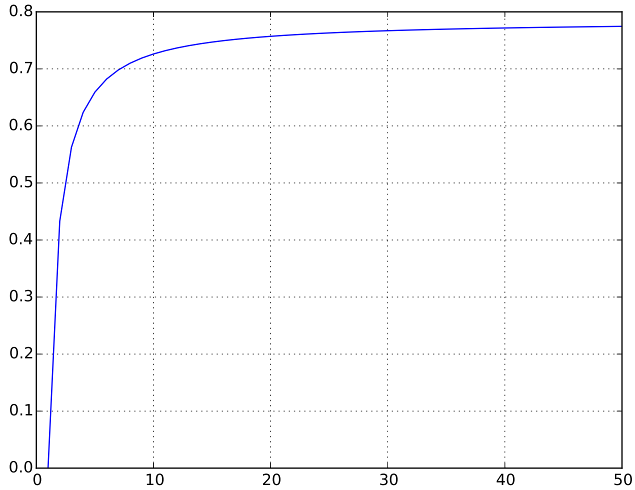

FIGURE 3 – Tracé de la suite $(u_n)_n$

On conjecture $$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}}$$

6. Pour n entier non nul, on a

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

On reconnaît une somme de Riemann avec la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u^2}$ et par conséquent

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}}$$

7. Avec le résultat de la question 4, on a

$$\frac{\text{Card } \mathrm{E}_n^{++}}{n^2} = v_n + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Et donc $$\boxed{u_n = \frac{4(1+4n+n^2\pi+\mathrm{o}(n^2))}{(2n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi}$$

8. Soit k entier non nul. On a $\mathrm{Z}_k \sim \mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n = \dfrac{\text{Card } \mathrm{E}_n}{\text{Card } [\![-n\,;\, n]\!]^2}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{S}_p \sim \mathscr{B}(p, u_n/4)}$$

9. On saisit :

```
tMC=[]
N=5000
for n in tn:
    tX=rd.randint(-n,n+1,N)
    tY=rd.randint(-n,n+1,N)
    res=0
    for k in range(N):
        if tX[k]**2+tY[k]**2<=n**2:
```

```
            res+=1
    tMC.append(res/N*4)

plt.plot(tn,tMC)
plt.grid();plt.show()
```

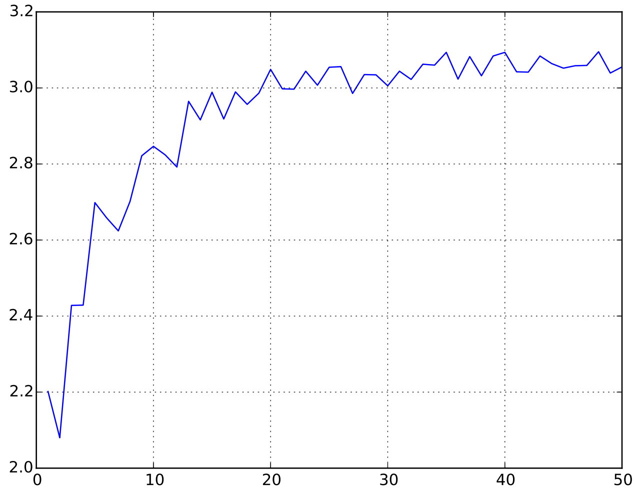

FIGURE 4 – Approximation par Monte-Carlo

Il s'agit d'une méthode de Monte-Carlo avec l'approximation motivée par la loi faible des grands nombres

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} 4\mathrm{Z}_k \simeq 4\mathbb{E}(\mathrm{Z}_1) = u_n}$$

Exercice 12 (Centrale 2017)

On définit la suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier. Pour n entier, on pose $\mathrm{A}_n = \left(\mathrm{F}_{i+j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (les coefficients sont indicés entre 0 et $n-1$).

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\mu = \min \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$ et $\lambda = \max \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M})$. Montrer
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mu \mathrm{X}^\top \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} \leqslant \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$$
2. Écrire une fonction `fibo(n)` d'argument n entier qui renvoie $[\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_n]$.
3. Écrire une fonction `A(n)` d'argument n entier qui renvoie A_n.
4. Afficher les valeurs propres de A_n pour $n \in [\![\, 2\,;\, 10\,]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
5. Déterminer $\dim \mathrm{Ker}\, \mathrm{A}_n$ pour n entier avec $n \geqslant 2$.
6. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X}$ n'est ni négative, ni positive.
7. En déduire que pour n entier avec $n \geqslant 2$, la matrice A_n admet exactement une valeur propre strictement positive α_n et une valeur propre strictement négative β_n.
8. Représenter les termes des suites $(\alpha_n)_{n\in[\![\, 0\,;\, 20\,]\!]}$ et $(\beta_n)_{n\in[\![\, 0\,;\, 20\,]\!]}$.
9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n + \beta_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Corrigé : 1. Soit $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de M dont l'existence est assurée par le théorème spectral. Notant $\mathrm{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{U}_i$ pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec les x_i réels et λ_i les valeurs propres associées aux U_i, il vient
$$\mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}$$
et de même pour la minoration. Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mu \mathrm{X}^\top \mathrm{X} \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M}\mathrm{X} \leqslant \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X}}$$

2. On saisit :

```
def fibo(n):
    res=[0,1]
    for k in range(1,n):
        res.append(res[-1]+res[-2])
    return res[:n+1]
```

3. On saisit :

```
def A(n):
    res=np.zeros((n,n))
    tf=fibo(2*(n-1))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            res[i,j]=tf[i+j]
    return res
```

4. On saisit :

```
for n in range(2,11):
    print("\nn=",n)
    print(alg.eigvals(A(n)))
```

On observe :

```
n= 2
[-0.61803399  1.61803399]

n= 3
[  4.64575131e+00  -6.45751311e-01   1.89580158e-16]

n= 4
[  1.27082039e+01  -7.08203932e-01  -3.37878619e-17   3.78373308e-16]
...
```

On conjecture qu'il y a exactement une valeur propre strictement positive, une strictement négative et que zéro est de multiplicité $n-2$.

5. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Avec les opérations $\mathrm{C}_k \leftarrow \mathrm{C}_k - \mathrm{C}_{k-1} - \mathrm{C}_{k-2}$ pour $k \in [\![3\,;n]\!]$, on annule les colonne $\mathrm{C}_3, \ldots, \mathrm{C}_n$. Les deux premières colonnes étant non nulles et échelonnées, il vient avec le théorème du rang :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} \mathrm{A}_n = n-2}$$

6. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Pour $\mathrm{X}^\top = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, il vient

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

D'après le théorème spectral, on a $\mathrm{A}_2 = \mathrm{PDP}^\top$ avec $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(\varphi, \psi)$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. On note ${\mathrm{X}_2}^\top = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ et on pose $\mathrm{U} = \mathrm{P}^\top \mathrm{X}_2$ avec $\mathrm{U}^\top = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$. Il vient

$${\mathrm{X}_2}^\top \mathrm{A}_2 \mathrm{X}_2 = \mathrm{U}^\top \mathrm{D} \mathrm{U} = \varphi u^2 + \psi v^2$$

Comme $\mathrm{X}_2 \mapsto \mathrm{P}^\top \mathrm{X}_2$ est bijective, on peut choisir $(u,v) = (1,0)$ ou $(0,1)$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} \text{ n'est ni négative, ni positive.}}$$

Remarque : On peut procéder sans réduction ici car le calcul est simple :

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} = 2xy + y^2 = (x+y)^2 - x^2$$

Les choix de $(x,y) = (0,1)$ ou $(1,-1)$ permettent de conclure.

7. Soit n entier avec $n \geqslant 2$. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_n \mathrm{X} > 0$. D'après le résultat de la première question, on a

$$\alpha_n \|\mathrm{X}\|^2 \geqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{M} \mathrm{X} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_n > 0$$

et de même, on prouve $\qquad \beta_n < 0$

D'après le théorème spectral, la matrice A_n symétrique réelle est diagonalisable. Ainsi, on a $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}_n) = \dim \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}_n = n-2$ et on conclut

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}_n \text{ admet exactement une valeur propre strictement positive } \alpha_n \text{ et une valeur propre strictement négative } \beta_n.}$$

8. On saisit :

```
tn=range(2,20)
tt=[sum(alg.eigvals(A(n))) for n in tn]
ta=[max(alg.eigvals(A(n))) for n in tn]
plt.plot(tn,tt,'bo--')
plt.grid();plt.show()
plt.plot(tn,ta,'ro--')
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

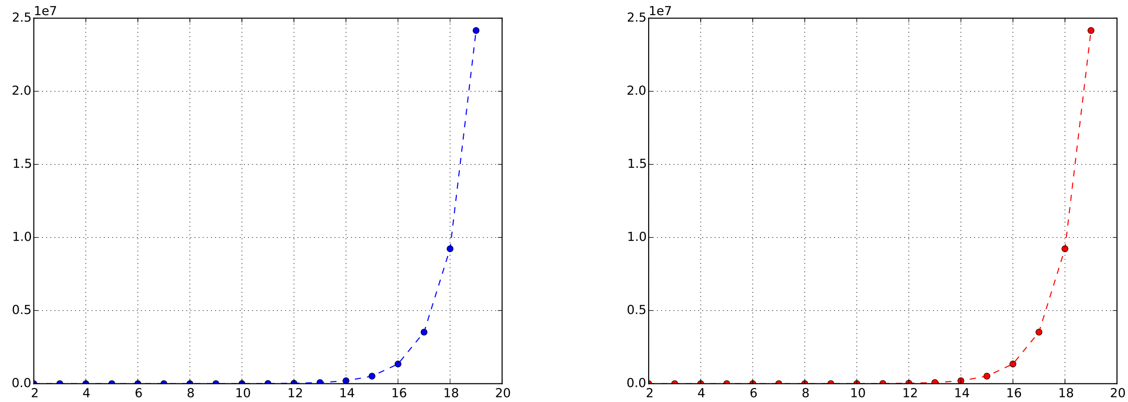

FIGURE 5 – Tracé des suites $(\alpha_n + \beta_n)_n$ et $(\alpha_n)_n$

9. Soit n entier. La matrice A_n est semblable à $\mathrm{diag}(\alpha_n, \beta_n, 0, \ldots, 0)$ d'où $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}_n) = \alpha_n + \beta_n$. En calculant les premières valeurs de la suite $(\mathrm{F}_n)_n$, on remarque que $\mathrm{F}_n \geqslant n$ pour $n \geqslant 5$ ce qu'on peut aisément démontrer par récurrence double. Par comparaison et en observant que $\alpha_n \geqslant \alpha_n + \beta_n$, on conclut

$$\boxed{\alpha_n + \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}$$

Exercice 13 (Centrale 2021)

Soit n entier non nul et $\mathrm{A}_n = \left(\mathrm{X}_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes. On note $\mathrm{D}_n = \det(\mathrm{A}_n)$.

1. Avec l'outil informatique, estimer les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{D}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{D}_n)$ pour différentes valeurs de n lorsque les $\mathrm{X}_{i,j}$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{U}_{\{-1,1\}}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer ces conjectures pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. Établir $$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \det\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
4. Soit x réel. Calculer $\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x))$ dans le cas où les $\mathrm{X}_{i,j}$ ont la même loi.
5. On suppose les $\mathrm{X}_{i,j}$ centrées réduites.
   (a) Soient σ et τ deux permutations de $[\![1\,;\, n]\!]$. Montrer
   $$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{X}_{\sigma(i),i},\ \prod_{i=1}^{n}\mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma=\tau \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
   (b) Calculer $\mathbb{V}(\mathrm{D}_n)$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def A(n):
    return 2*rd.randint(0,2,(n,n))-1

N=10000
for n in range(1,6):
    m1=0
    m2=0
    for k in range(N):
        D=alg.det(A(n))
        m1+=D
        m2+=D**2
    print("n=",n)
    print("E(D_n)=",m1/N)
    print("V(D_n)=",m2/N-(m1/N)**2)
    print()
```

On observe :

```
n= 1
E(D_n)= -0.002
V(D_n)= 0.999996

n= 2
E(D_n)= -0.0206
V(D_n)= 1.98717564

n= 3
E(D_n)= -0.0312
V(D_n)= 6.06942656
```

```
n= 4
E(D_n)= -0.036
V(D_n)= 24.030703999999997

n= 5
E(D_n)= -0.15359999999999996
V(D_n)= 119.32360703999997
```

On conjecture $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$

2. Pour $n = 1$, on a $\mathrm{D}_1 = \mathrm{X}_{1,1}$ d'où $\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0$ puis $\mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2) = \mathbb{E}(1) = 1$. Pour $n = 2$, on a $\mathrm{D}_2 = \mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}$ puis par linéarité de l'espérance et indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \ldots = 0$$

Puis $$\mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2} - \mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) + \mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,2}\mathrm{X}_{2,1})$$

avec $$\mathbb{V}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{1,2}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}^2\mathrm{X}_{1,2}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{1,1}\mathrm{X}_{2,2}) = 1$$

et de même pour l'autre terme. On conclut

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_1) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_1) = 2 \qquad \mathbb{E}(\mathrm{D}_2) = 0 \qquad \mathbb{V}(\mathrm{D}_2) = 2}$$

3. On a $$\mathrm{D}_n = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}$$

Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right)$$

Par indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$, on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{D}_n) = \det\left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}}$$

4. Soit x réel. On a $\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right)$

d'où $$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(x\delta_{\sigma(i),i} - \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i})\right)$$

Notant $\mu = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{i,j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, on trouve

$$\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - \mu\mathrm{J})$$

On effectue les opérations $\mathrm{C}_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ puis $\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \mu\mathrm{C}_1$ et on obtient

$$\boxed{\mathbb{E}(\chi_{\mathrm{A}_n}(x)) = x^{n-1}(x - n\mu)}$$

5.(a) Soit $(\sigma, \tau) \in \mathrm{S}_n^2$. On a par indépendance

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i),i}) = 0$$

Ainsi, d'après le relation de König-Huygens, il vient

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right)$$

Si $\sigma \neq \tau$, il existe $i_0 \in [\![1\,;\,n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$ d'où

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}\mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}\mathrm{X}_{\tau(i_0),i_0} \prod_{i\in[\![1\,;\,n]\!]\smallsetminus\{i_0\}} \ldots\right) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_{\sigma(i_0),i_0}) \times \ldots = 0$$

Si $\sigma = \tau$, on a
$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}^2\right) = \mathbb{E}(1) = 1$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \sum_{\tau\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) \\ &= \sum_{(\sigma,\tau)\in\mathrm{S}_n^2} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\sigma(i),i}, \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{\tau(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 = \mathrm{Card}\ \mathrm{S}_n\end{aligned}$$

On conclut
$$\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{D}_n) = n!}$$

Exercice 14 (Mines-Telecom 2024)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par u_0 réel et $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$ pour n entier. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.

Corrigé : Quitte à considérer $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on peut supposer $u_0 > 0$. Par récurrence, on en déduit $u_n > 0$ pour tout n entier d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

ce qui prouve $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par conséquent

$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$$

D'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs, on conclut par critère de Riemann

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

On a $$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où $$(-1)^{n+1}u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ converge d'après le théorème des séries alternées et la série $\sum \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison et critère de Riemann. Par sommation de termes de séries convergentes, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum(-1)^n u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 15 (Mines-Telecom 2024)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
2. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ solution de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{A}$ et $\Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP}$.
   (a) Calculer $\Delta^2 + \Delta$.
   (b) Montrer que les matrices D et Δ commutent. Qu'en déduit-on sur Δ ?
   (c) Résoudre l'équation $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé : On a
$$\chi_{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 \\ -1 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)$$
Par condition suffisante, la matrice A est diagonalisable. On a
$$(x,y) \in \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) \iff (\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0 \iff x - y = 0 \iff (x,y) = x(1,1)$$
et
$$(x,y) \in \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \iff \mathrm{AX} = 0 \iff (x,y) = x(1,-1)$$
Ainsi
$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, notant $\mathrm{M} = \mathrm{PXP}^{-1}$ avec $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a
$$\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \mathrm{A} \iff \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} + \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} \iff \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D}$$
On remarque
$$\mathrm{XD} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 = \mathrm{DX}$$
Posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve
$$\mathrm{XD} - \mathrm{DX} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff (b,c) = 0$$
Ainsi
$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = \mathrm{D} \iff \begin{cases} a^2 + a = 0 \\ d^2 + d = 2 \end{cases} \iff (a,d) \in \{(0,1),(0,-2),(-1,1),(-1,-2)\}$$
Enfin après calcul des matrices $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$, on conclut
$$\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.}$$

Remarque : On a vu que les matrices X et D commutent et par conséquent, la matrice X est diagonale. C'est un fait plus général : pour f et g dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, si f et g commutent et f diagonalisable à valeurs propres simples, alors $g \in \mathbb{K}[f]$ et donc g est en particulier diagonalisable pour le même changement de base que f. Le lecteur curieux pourra se référer à l'exercice 0 de la feuille 0.

Exercice 16 (CCINP 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $f^2 - f - 2\,\mathrm{id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Établir $$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{id}\,) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$ en utilisant le lemme des noyaux puis sans l'utiliser.
3. On suppose désormais E de dimension finie. Montrer $$\mathrm{Im}\,(f + \mathrm{id}\,) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}\,)$$

Corrigé : Exercice 62 CCINP 2025

Exercice 17 (CCINP 2023)

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(t) = a_n(1-t)t^n$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,]$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.

Corrigé : 1. On a $u_n(1) = 0$ pour tout n entier et $u_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(t^n)$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,[$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge simplement sur } [\,0\,;1\,].}$$

2. On suppose la suite $(a_n)_n$ non stationnaire à zéro sinon c'est trivial. Les u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on a pour n entier

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad u_n'(t) = a_n(nt^{n-1} - (n+1)t^n) = a_n t^{n-1}\,(n-(n+1)t)$$

d'où
$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{a_n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\frac{a_n}{n+1}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge normalement si et seulement si la série } \sum \frac{a_n}{n+1} \text{ converge.}}$$

3. Soit $(n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,]$. On a

$$\mathrm{R}_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(1-t)t^k \leqslant a_{n+1}(1-t)\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = a_{n+1}(1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t}$$

d'où
$$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant a_{n+1} = \mathrm{o}(1)$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et son reste converge uniformément d'où

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge uniformément.}}$$

Exercice 18 (Mines-Telecom 2021)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout k entier.

1. Rappeler le théorème d'approximation de Weierstrass.
2. Montrer que la fonction f est nulle.

Corrigé : 1. Le théorème d'approximation de Weierstrass est :

Théorème 1. *Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales, i.e. pour $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{K})$*

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \quad | \quad \|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

2. Par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, il vient

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

L'idée consiste, d'après le théorème de Weierstrass, à approcher en un certain sens f par P dans cette égalité pour aboutir à $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P} - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Puis

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\left[f(t) - \mathrm{P}(t) + \mathrm{P}(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Par hypothèse sur f, il s'ensuit

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f-\mathrm{P})(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \|f-\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et la fonction f^2 étant continue et positive sur $[\,0\,;1\,]$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Variante : Soit $f \in \mathrm{E}$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f$. On vérifie sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f^2 - f\mathrm{P}_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|f - \mathrm{P}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

ce qui prouve $f\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f^2$. Il en résulte

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Il s'agit donc d'une suite constante nulle et on obtient $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On conclut comme précédemment.

Remarque : Notant $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on munit l'espace du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ pour $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Dans un espace préhilbertien réel, on peut montrer que pour F sev de E, on a

$F^\perp = \bar{F}^\perp$. On montre ici que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0_E\}$ d'où $\overline{\mathbb{R}[X]}^\perp = \{0_E\}$. L'adhérence $\overline{\mathbb{R}[X]}$ s'entend en sens de la norme euclidienne. D'après le théorème de Weierstrass, on a $\mathbb{R}[X]$ dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Or, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme euclidienne et il s'ensuit que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour la norme euclidienne, autrement dit $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$ d'où le résultat obtenu.

Exercice 19 (Mines-Telecom 2024)

Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Établir $\qquad \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}\mathrm{U}^\top) = 1 + \mathrm{U}^\top\mathrm{U}$

Corrigé : On munit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathscr{C}$ la base canonique et $u \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} u = \mathrm{U}$. La matrice $\mathrm{I}_n + \mathrm{U}\mathrm{U}^\top$ est la matrice dans la base $\mathscr{C}$ de l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto x + u\,\langle u, x\rangle$. Posant $v = u/\|u\|$, on a

$$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}\mathrm{U}^\top) = \det(f) \quad \text{avec} \quad f : x \in \mathrm{E} \mapsto x + \|u\|^2\,\langle x, v\rangle\, v$$

et dans $\mathscr{B}$ base orthonormée de E obtenue par complétion de (v), on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}(1 + \|u\|^2, 1, \ldots, 1)$$

On conclut $\qquad \boxed{\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}\mathrm{U}^\top) = 1 + \|u\|^2 = 1 + \mathrm{U}^\top\mathrm{U}}$

Remarque : La complétion orthonormée est un résultat de cours. Mais en réalité, on pouvait aussi simplement compléter la famille (u) en base orthogonale de E.

Exercice 20 (ENS 2024)

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \displaystyle\int_{x_n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour n entier.

1. Préciser la monotonie puis le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a clairement $(x_n)_n$ croissante. Supposons qu'il existe $\ell \geqslant x_0$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Par continuité, il vient $\ell = \ell + \displaystyle\int_{\ell}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ce qui est absurde puisque $\displaystyle\int_{\ell}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$ par séparation (intégrande continue positif non nul). La suite $(x_n)_n$ est donc croissante non convergente d'où

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ est croissante avec } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.}$$

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $[\,0\,; +\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité en $+\infty$. Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{2t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et le crochet $\left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty}$ est fini. Ainsi, en intégrant par parties, il vient

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-t^2})$ d'où, par intégration de relation de comparaison (avec une fonction de référence positive), on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

Soit n entier. On a
$$x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} x_n + \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2}}{2x_n}(1+\mathrm{o}(1))$$

puis
$$x_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{=} x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2}(1+\mathrm{o}(1)) + \frac{\mathrm{e}^{-2x_n^2}}{4x_n^2}(1+\mathrm{o}(1))^2 = x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})$$

d'où
$$\mathrm{e}^{x_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(x_n^2 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})\right) = \mathrm{e}^{x_n^2}\left(1 + \mathrm{e}^{-x_n^2} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x_n^2})\right) = \mathrm{e}^{x_n^2} + 1 + \mathrm{o}(1)$$

et on obtient
$$\mathrm{e}^{x_{n+1}^2} - \mathrm{e}^{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

D'après le théorème de Césaro, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{e}^{x_{k+1}^2} - \mathrm{e}^{x_k^2}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où
$$\mathrm{e}^{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{=} n(1+\mathrm{o}(1))$$

puis $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\ln(n)+\ln(1+\mathrm{o}(1))} = \sqrt{\ln(n)+\mathrm{o}(\ln(n))}$$

On conclut $$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln(n)}}$$