Exercice 1. [Centrale MP 2024]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A son polynôme minimal.

1. Montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme $P\mathbb{C}[X]$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on note $\mu_{A,x}$ le générateur unitaire de l'idéal annulateur ponctuel $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A)x = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$.
3. Soit A une matrice diagonale par blocs dont la diagonale vaut (A_1, A_2) où A_1 et A_2 sont des matrices de Frobenius (compagnon) et $\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} = 1$. Montrer que A est semblable à une matrice de Frobenius.

Solution :
(corrigé peu détaillé *)*

1. *C'est du cours, l'idée étant : $P\mathbb{C}[X]$ est un idéal, et réciproquement si I est un idéal non nul, on montre que le reste de la division euclidienne de tout élément de I par un polynôme de I de plus petit degré (que l'on peut même choisir unitaire) est nul, donc $I \subset P\mathbb{C}[X]$ (et l'inclusion inverse est vraie).*
2. *On montre le résultat si μ_A est la puissance d'un polynôme irréductible : $\mu_A = P^\alpha$, et il existe x tel que $P^{\alpha-1}(A)x \neq 0$. Alors $\mu_{A,x}$ divise μ_A puis $\mu_{A,x} = \mu_A$ et $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.*

   Dans le cas général, on utilise le lemme des noyaux et on décompose ainsi l'espace en somme de sous-espaces cycliques (i.e. engendrés par $\left(A^k x\right)_{k\in\mathbb{N}}$), et on note $x_1, \dots, x_r$ les vecteurs qui déterminent cette décomposition. On note $x_0 = x_1 + \cdots + x_r$.

   Alors $\mu_{A,x_0} \mid \mu_A$ (c'est vrai pour tout x). Par ailleurs, si $x \in E$, il est combinaison linéaire des $A^k x_i$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, r]\!]$, donc comme $\mu_{A,x_i} \mid \mu_{A,x_0}$ (vrai par stabilité des sous-espaces cycliques), $\mu_{A,x_0}(A)x = 0$, donc $\mu_A \mid \mu_{A,x_0}$.

   Finalement, $\mu_A = \mu_{A,x_0}$.
3. *Avec les notations de la question précédente, E est somme de deux sous-espaces cycliques déterminés par deux vecteurs x_1 et x_2. On a $\mu_{x_1} = \chi_{A_1}$ et $\mu_{x_2} = \chi_{A_2}$ (propriété des matrices compagnon), puis $\mu_A = \mu_{x_1+x_2} = \mathrm{PPCM}(\chi_{A_1}, \chi_{A_2}) = \chi_{A_1}\chi_{A_2} = \chi_A$, donc A est semblable à une matrice compagnon (caractérisée par $\chi = \mu$).*

Exercice 2. [Centrale MP 2017]
Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 2)$. On note $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique.

1. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$, où $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$.
2. On suppose que H est stable par multiplication et que $I_n \notin H$. Montrer que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ M^2 \in H \Longrightarrow M \in H$$

   et aboutir à une contradiction.
   On conclut donc que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ stable par $\times$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Pour $n = 2$, montrer que H et $\mathscr{T}_2(\mathbb{C})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{C}$-algèbres.

Solution :

1. $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

2. • *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 \in H$. Comme $I_n \notin H$, on a $H \oplus \mathrm{Vect}(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, si bien que $M = H_1 + \lambda I_n$ où $H_1 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On calcule alors :*

$$M^2 = \underbrace{H_1^2 + 2\lambda H_1}_{\in H} + \lambda^2 I_n \in H$$

d'où l'on déduit que $\lambda^2 I_n \in H$, ce qui n'est possible que si $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$, donc $M = H_1 \in H$.

• *Ainsi, dans H il y a les $E_{i,j}$ où $i \neq j$: en effet, si $E_{i,j} \notin H$, alors $E_{i,j}^2 = 0 \notin H$ ce qui est absurde puisque H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.*
Par stabilité par produit, dans H il y a aussi tous les $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Finalement $H = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est absurde.

3. On constate déjà que H et $\mathscr{T}_2(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres de dimension 3 contenant toutes les deux I_2.
Comme $\mathrm{Vect}(I_n) \subsetneq H$, on trouve dans H une matrice M non scalaire, qui admet un vecteur propre v (car on est sur $\mathbb{C}$).
Si l'on arrive à démontrer que $\mathrm{Vect}(v)$ est stable par tous les éléments de H, alors en complétant v une une base (v, w) de $\mathbb{C}^2$, les éléments endomorphismes canoniquement associés aux élément de H ont dans cette base une matrice triangulaire supérieure : en notant P la matrice de passage de la base canonique à (u, v), $M \in H \mapsto PMP^{-1} \in \mathscr{T}_2(\mathbb{C})$ est l'isomorphisme d'algèbre recherché.

Exercice 3. [Centrale MP 2 2015]
Pour $n \geqslant 1$, on note $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et S_n le groupe des permutations de E_n. En PYTHON une permutation $\sigma \in S_n$ est représentée par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$. Pour $i \in E_n$, la *période* de i pour $\sigma \in S_n$ est le plus petit entier naturel non nul p tel que $\sigma^p(i) = i$. On le note $Per(\sigma, i)$.

1. Justifier l'existence de $Per(\sigma, i)$ et montrer qu'elle est plus petite que n. Préciser l'ordre de σ en fonction des $Per(\sigma, i)$.
2. Écrire une fonction qui retourne la période d'un élément i pour une permutation σ.
3. Écrire une fonction qui retourne la liste des périodes, pour une permutation σ, des éléments de E_n.
   Application : $\sigma = [3, 6, 7, 0, 2, 1, 8, 5, 4, 9]$.

Soit $\sigma \in S_n$. On définit une relation R_σ sur E_n par : $xR_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x)$.

4. Montrer que R_σ est une relation d'équivalence.

On appelle *orbite* d'un élément x de E_n sa classe d'équivalence. On la note $\Omega_\sigma(x)$.

5. Montrer que $\Omega_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$ où $p = Per(\sigma, x)$.
6. Écrire une fonction qui retourne la liste des orbites d'une permutation σ.

Solution :

1. *Soit $\sigma \in S_n$.*
   - *Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. $\{\sigma^k(i) \,|\, 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est un ensemble fini à $n+1$ éléments, mais pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\sigma^k(i) \in [\![0, n-1]\!]$ ensemble à n éléments, donc il existe $k, \ell \in [\![0, n]\!]$, $k < \ell$ tels que $\sigma^k(i) = \sigma^\ell(i)$, donc $\sigma^{\ell-k}(i) = i$ où $\ell - k \in [\![1, n]\!]$, donc $\{p \in \mathbb{N}^* \,|\, \sigma^p(i) = i\}$ est non vide car il contient $\ell - k$, et son minimum est $\leqslant \ell - k \leqslant n$.*
   - *Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Notons $p = Per(\sigma, i)$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ que l'on écrit $k = qp + r$ où $q, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < p$. Alors $\sigma^k(i) = \sigma^r((\sigma^p)^q(i)) = \sigma^r(i)$. Par minimalité de p, $\sigma^k(i) \iff r = 0 \iff p | k$.*
   - *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\sigma^k = \mathrm{id}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $Per(\sigma, i) | k$. Ainsi l'ordre de σ est le PPCM des $Per(\sigma, i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.*

   Variante de preuve.
   On décompose σ en produit de cycles à supports disjoints : $\sigma = \prod_{j=1}^r \tau_j$. Soit $i \in E_n$, alors soit $\sigma(i) = i$ et donc $Per(\sigma, i) = 1$, soit il existe $j \in [\![1, r]\!]$ tel que i soit dans le support de τ_j, et donc $Per(\sigma, i) = p_i$ où p_i est la longueur de τ_i. Dans tous les cas $Per(\sigma, i)$ existe et est $\leqslant n$.
   Enfin, l'ordre de σ est le PPCM des p_i, donc le PPCM des périodes.
2. *On calcule les images de i par les itérés de σ.*

```python
def periode(sigma,i) :
    compteur=1 # période au moins 1
    j=sigma[i] # calcul de la première image
    while j!=i : # sortie lorsque sigma^compteur(i)=i
        compteur+=1
        j=sigma[j]
    return compteur
```

3. *On applique la fonction précédente à chaque élément de E_n.*

```python
def liste_periodes(sigma) :
    return [periode(sigma,i) for i in range(len(sigma))]
```

Pour l'exemple de l'énoncé on obtient : [2,7,7,2,7,7,7,7,7,1]

4. — *Pour tout $x \in E_n$, $x = \sigma^0(x)$ donc la relation est réflexive ;*
   — *pour tous $x, y \in E_n$,*
   $$xR_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \sigma^k(x) = y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \sigma^{-k}(y) \iff yR_\sigma x$$
   donc la relation est symétrique ;
   — *pour tous $x, y, z \in E_n$,*
   $$(xR_\sigma y \text{ et } yR_\sigma z) \iff \exists k, \ell \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x) \text{ et } z = \sigma^\ell(y)$$
   donc $z = \sigma^{k+\ell}(x)$, donc $xR_\sigma z$, la relation est transitive.

   R_σ est une relation d'équivalence.
5. *Par définition*
   $$\Omega_\sigma(x) = \left\{ y \in E_n \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x) \right\} = \left\{ \sigma^k(x) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sigma^k(x) \,\middle|\, 0 \leqslant k \leqslant Per(\sigma, x) \right\}$$
   par division euclidienne comme à la question 1.
6. *On calcule les orbites les unes après les autres en notant les éléments déjà rencontrés.*

```python
def orbites(sigma) :
    n=len(sigma)
    res=[] # initialement liste vide d'orbites
    dejavu=[False for i in range(n)] # pour retenir les cas déjà traités
    for i in range(n) : # on parcourt sigma
        if not dejavu[i] : # on ignore les cas déjà vus
            orbi=[i] # on commence à construire l'orbite de i
            dejavu[i]=True # i est traité
            j=sigma[i] # on calcule son image
            while j!=i : # tant qu'on trouve des images différentes de i
                orbi.append(j)
                dejavu[j]=True
                j=sigma[j]
            res.append(orbi) # on ajoute l'orbite à la liste des orbites
    return res
```

Pour l'exemple de l'énoncé on obtient : [[0,3],[1,6,8,4,2,7,5],[9]] *(complexité linéaire).*

Exercice 4. [Centrale MP 2 2017]

Soit $M = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Soit $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$), conjecturer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)\right)$$

2. (a) Montrer que $\chi_M = (X^2 + aX + b)^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à calculer. En déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.
(Indication : on pourra déterminer le polynôme caractéristique de $\sqrt{3}M$ dans un premier temps.)

   (b) Trouver un plan vectoriel F stable par u. Donner la matrice de $u_{|F}$ dans une base orthonormale de F.

   (c) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ soit diagonale par blocs.

Solution :

1. On saisit :

```python
import numpy as np

M = (1/np.sqrt(3))*np.array([
    [ 1,  0,  1,  1],
    [ 0,  1,  1, -1],
    [-1, -1,  1,  0],
    [-1,  1,  0,  1]
])

# vecteurs de la base canonique
E = np.eye(4)

for i in range(4):

    x = E[:, i]

    print("\nVecteur e{}".format(i+1))

    for n in [10, 50, 100, 500, 1000]:

        somme = np.zeros(4)
        y = np.array(x) # nouvelle référence indépendante

        for k in range(n):
            somme += y
            y = np.dot(M, y)

        moyenne = somme / n

        print("n =", n)
        print("A_n =", moyenne)
```

ce qui renvoie des quadruplet de valeurs proches de 0*, et permet de conjecturer que la limite est nulle.*

2. (a) *On calcule le polynôme caractéristique de* $\sqrt{3}M$ *en développant par rapport à la première ligne puis en calculant les 3 déterminants consécutifs à l'aide de la formule de Sarrus... On obtient assez facilement* $\chi_{\sqrt{3}M} = \left((X-1)^2+2\right)^2$ *d'où l'on déduit* $\chi_M = \left(X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}X + 1\right)^2$.
On teste alors $M^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}M + I_4 = 0$ *(ouf!).*
On pouvait aussi tout faire avec Python. Voici un code exploitable :

```python
import numpy as np

M = (1/np.sqrt(3))*np.array([
    [ 1,  0,  1,  1],
    [ 0,  1,  1, -1],
    [-1, -1,  1,  0],
    [-1,  1,  0,  1]
])

P=np.poly(M) # coefficients du polynôme caractéristique
b=np.sqrt(P[-1]) # b par identification
a=P[1]/2 # a par identification
print(a)
print(b)
print(P[2]-(a*a+2*b))
print(P[3]-2*a*b) # tests de vérifiaction

print(np.dot(M,M)+a*M+b*np.eye(4)) # le polynôme est annulateur
```

Remplacer M par $N = \sqrt{3}M$ si l'on veut retrouver à ε près les valeurs exactes calculées mathématiquement.

(b) *Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $u^2(x) - \frac{2}{\sqrt{3}}u(x) + x = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $F = \big(x, u(x)\big)$ est u-stable.*

Ensuite, on peut choisir $x = e_1$, calculer $u(e_1)$ puis orthonormaliser la famille obtenue, ce sera une base orthonormale de F.

Mais on peut procéder autrement en répondant à la question suivante aussi :

(c) *On observe que $M^\top M = I_4$, par changement de base orthonormale (possible en concaténant un base orthonormale de F et une de $F^\perp$) on obtient que les blocs correspondant à la matrice de $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ vérifient $A^\top A = I_2$ et $B^\top B = I_2$: ce sont des matrices de rotations puisque 1 n'est pas valeur propre, et mieux elles ont le même polynôme caractéristique (car elles sont annulées par le même polynôme de degré 2 que M), on peut se ramener à $A = B$.*

De plus, $\mathrm{tr}(M) = \frac{4}{\sqrt{3}}$, donc ce sont des matrices de rotation d'angle θ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarque : on peut démontrer la conjecture de la question 1 : on $\mathbb{C}$-diagonalise M, les vecteurs propres sont des complexes de module 1 non égaux à 1, on décompose chaque vecteur de base dans une base de diagonalisation et les coordonnées correspondantes pour la somme sont alors de la forme :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}k\theta} = \frac{1}{n}\frac{1-e^{\mathrm{i}n\theta}}{1-e^{\mathrm{i}\theta}}$$

majorée en module par $\dfrac{1}{n}\dfrac{2}{\left|1-e^{\mathrm{i}\theta}\right|}$ dont de limite nulle.