ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2025)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$

1. La fonction f admet-elle des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On pose $\mathrm{K} = [\,0\,;1\,]^2$. Justifier que la fonction f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer
2. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble
$$\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, f \in \mathrm{E}\right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer sa valeur.

Exercice 3 (CCINP 2025)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Exercice 4 (Mines 2025)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que pour $r > 0$ assez grand, on a
$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}}$$
2. Montrer que pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et pour $r > 0$ assez grand, on a
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1}\,\mathrm{d}t$$
3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 5 (Mines 2025)

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler puis, pour n entier non nul, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
2. Pour n entier non nul, calculer $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $\mathrm{C} = \big(i \wedge j\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec n entier non nul.

Exercice 6 (Centrale 2025)

Soient λ et c réels. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, on considère l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda x) \tag{E_λ}$$

On note $\mathcal{S}_{\lambda,c}$ l'ensemble des solutions f de (E_λ) qui vérifient de plus $f(0) = c$.

1. Déterminer $\mathcal{S}_{1,c}$ et $\mathcal{S}_{-1,c}$.
   Dans la suite, on suppose $|\lambda| < 1$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda^{n(n-1)/2}\dfrac{x^n}{n!}$. En déduire un élément de $\mathcal{S}_{\lambda,c}$.
3. (a) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer

$$f \in \mathcal{S}_{\lambda,c} \iff \mathrm{T}(f) = f \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}(f) : x \mapsto c + \int_0^x f(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_{\lambda,c}$ est un singleton.

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et A un événement non négligeable. On pose

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}) = \sum_{x\in \mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x|\mathrm{A})$$

1. Montrer que si $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$, alors la quantité $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A})$ est bien définie.
2. Soient $(\mathrm{A}_n)_n$ un système complet d'événements et $(a_n)_n$ une suite réelle. On pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}$. Montrer que S est une variable aléatoire réelle discrète et

$$\mathrm{S} \in \mathrm{L}^1 \iff \sum |a_n|\,\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \text{ converge}$$

3. On suppose $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$ et soit Y variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) > 0$ pour tout $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$. On pose

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y}) = \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y} = y)\mathbb{1}_{\{\mathrm{Y}=y\}}$$

   (a) Montrer $\qquad \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$

   (b) On suppose X et Y dans L^2 et $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$ ainsi que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = \mathrm{X}$. Montrer que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ presque sûrement.

Exercice 8 (ENS 2025)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = 1$. Montrer que les matrices A et B sont co-trigonalisables.