

Si vous avez des questions : eloi.kaeser@polytechnique.edu ou +33 6 59 94 25 93 (WhatsApp)

Exercice 1. (Mines-Télécom)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n de deux façons différentes.

Exercice 2. (CCINP)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N}(X_i)$, c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant le plus petit élément de .
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.
 - (b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $E(Y)$.

Exercice 3. (Mines-Ponts)

Montrer qu'il n'existe aucun entier tel que $n \geq 2$ et $n|2^n - 1$.

Exercice 4. (CCINP)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k)!}{j!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E(2^{X+Y})$ existe et la calculer.

Exercice 5. (Mines-Ponts)

1. Soit a_1, \dots, a_n des réels. Calculer le déterminant $V(a_1, \dots, a_n)$ de la matrice suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ a_1 & & & a_n \\ \dots & & & \dots \\ a_1^{n-1} & \dots & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
2. Calculer $\det(i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$
3. Soit a_1, \dots, a_n des réels tous différents. On pose $P_i = \prod_{j \neq i} (X - a_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i,k} X^k$. Calculer $\det(\alpha_{i,k})_{1 \leq i \leq n; 0 \leq k \leq n-1}$

Exercice 6. (Mines-Ponts)

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique si il existe $e \in E$ tel que $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E .

1. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u est cyclique.
2. On suppose u cyclique. Montrer que $\pi_u = \chi_u \cdot \text{ewline}$
3. On suppose u cyclique. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u . Montrer que v peut s'écrire comme un polynôme en u .
4. On suppose u cyclique et soit F un sev stable par u . Montrer que u_F est cyclique aussi.

Exercice 7. (CCINP)

Soit a, b deux réels strictement positifs.

1. Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$$

2. Justifier que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$.
3. Exprimer $F(x)$.

Exercice 8. (Mines-Télécom)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $rg(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$