Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2015)

1. Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}/n$ où $\mathrm{Y} \sim \mathscr{B}(n,p)$.
2. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), $\left(k, p + \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\dfrac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

   Soit $t > 0$ et $x \in [-1\,;1]$.
3. Montrer $$\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$$
4. On considère X variable aléatoire telle que $|\mathrm{X}| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$. Pour $t > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
5. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a $|\mathrm{X}_i| \leqslant a_i$ avec les $a_i > 0$. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Montrer $$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{S}_n}) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
6. Montrer $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
7. En déduire $$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\varepsilon / \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\right)$$
8. Commenter le résultat observé à la deuxième question.

Exercice 2 (Centrale 2022)

Un *nombre de Carmichael* est un entier $n \geqslant 2$ non premier tel que
$$\forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a \ [n]$$

1. Soit $n \geqslant 2$ non premier tel que $$\forall a \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad a^n \equiv a \ [n]$$
   Montrer que n est un nombre de Carmichael.
2. Écrire une fonction `carmichael(n)` d'argument `n` entier qui renvoie `True` si n est un nombre de Carmichael et `False` sinon.
3. Déterminer à l'aide de l'outil informatique le plus petit nombre de Carmichael.
4. Soit $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$ avec $r \geqslant 2$ et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts vérifiant $p_i - 1 | n - 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\, r]\!]$.
   (a) Montrer $$\forall i \in [\![1\,;\, r]\!] \qquad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a^n \equiv a \ [p_i]$$

   (b) Montrer que n est un nombre de Carmichael.

5. Soit n un nombre de Carmichael. Montrer que n est un produit de nombres premiers deux à deux distincts.
6. Soit $(\mathrm{G}, \times)$ un groupe abélien fini.
   (a) Soient x, y dans G avec $o(x) \wedge o(y) = 1$. Montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.
   (b) Soit $x \in \mathrm{G}$. Pour d diviseur de $o(x)$, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre d.
   (c) Soit m l'ordre maximal des éléments de G. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m.
   (d) En déduire $\qquad \forall p \in \mathcal{P} \qquad \mathrm{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$
7. Soit n un nombre de Carmichael et p un diviseur premier de n. Montrer que $p-1|n-1$.

Exercice 3 (Centrale 2022)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_{-1}^{1} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

1. Représenter les termes de la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_n)_{n\in[\![100\,;\,500]\!]}$. Qu'observe-t-on ?
   On pose
   $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]-1\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[\qquad \varphi(t) = -\frac{1}{t^2}\ln f(t)$$
2. Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en zéro. Que peut-on dire de $\varphi(t)$ lorsque $t \to -1$?
3. À l'aide de l'outil informatique, établir l'existence de $a > 0$ tel que
   $$\forall t \in \left]-1\,;1\right[\qquad \varphi(t) \geqslant a$$
   On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$
4. Établir $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$
5. En déduire $$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$
   On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_n = \int_{1}^{+\infty} (1+t)^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
6. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n! = \mathrm{e}^{-n} n^{n+1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$$
7. Établir $$\mathrm{J}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}_n)$$
   Retrouver la formule de Stirling.