

## Préparation à l'oral python - Feuille n°3

### Exercice 1 (Centrale 2017)

1. On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan } n$

(a) Soit  $(\varepsilon_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Montrer que  $\sum \varepsilon_n u_n$  converge. On note S sa somme. Montrer que  $S \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

(b) Soit  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . On définit  $(\varepsilon_n(x))_n$  comme suit

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq u_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \sum_{k=0}^n \varepsilon_k(x) u_k + u_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

i. Écrire une fonction `suite(x, n)` qui renvoie  $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k(x) u_k$ .

ii. Tester la fonction pour différentes valeurs de  $x$  et  $n \in \{100, 1000, 10000\}$ .

iii. Conjecturer le comportement de la suite.

(c) Démontrer la conjecture.

2. Soit  $(u_n)_n$  vérifiant

$$(H) : \begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ (u_n)_n \text{ décroissante positive} \end{cases}$$

Soit  $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $x \in [0; \lambda]$ . On définit  $(\varepsilon_n(x))_n$  comme précédemment. On pose

$$(P) : \forall x \in [0; \lambda] \quad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$$

(a) On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$

i. Montrer que  $(u_n)_n$  vérifie (H).

ii. Adapter la fonction `suite` et la tester pour  $x \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$  et plusieurs valeurs de  $n$ .

iii. La suite  $(u_n)_n$  vérifie-t-elle (P) ? Justifier.

(b) Déterminer une condition nécessaire suffisante sur  $(u_n)_n$  pour qu'elle vérifie (P).

## Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé. On pose  $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres distinctes de  $A$ . On définit enfin une suite matrices par

$$A_0 = A \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}$$

1. Montrer que  $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$  et que  $P(A)$  est nilpotente.

2. On pose  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  à coefficients dans

$]0; 1[$  choisie aléatoirement et  $A = UBU^{-1}$ .

- (a) Calculer  $P$  et  $P'$  manuellement.
  - (b) Avec l'outil informatique, calculer les  $A_k$  pour  $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$ . On pose  $D = A_4$  et  $N = A - D$ . Calculer  $N, N^2, N^3, ND$  et  $DN$ . Qu'observe-t-on ?
3. On revient au cas général. Vérifier que  $\mathbb{K}[A]$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et montrer que  $\mathbb{K}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{K})$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
  4. Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $P'(M)$  soit inversible. Montrer qu'il existe une matrice  $M_1 \in \mathbb{K}[M]$  telle que
 
$$Q(M - P(M)P'(M)^{-1}) = Q(M) - P(M)P'(M)^{-1}Q'(M) + (P(M)P'(M)^{-1})^2 M_1$$
  5. Montrer que pour tout  $k$  entier, on a  $P'(A_k)$  inversible et qu'il existe  $B_k \in \mathbb{K}[A]$  tel que  $P(A_k) = P(A)^{2^k} B_k$ .
  6. En déduire qu'il existe une matrice  $D$  diagonalisable et une matrice  $N$  nilpotente telles que  $A = D + N$  et  $DN = ND$ .

## Exercice 3 (Centrale 2019)

On effectue  $n$  lancers de pièces indépendants et la probabilité d'obtenir pile au  $k$ -ième lancer est notée  $p_k$ . On note  $X_n$  le nombre de piles obtenus au cours de ces  $n$  lancers et  $\pi_n$  la probabilité que  $X_n$  soit pair.

1. (a) Écrire une fonction `pi(n, p)` qui donne une estimation de  $\pi_n$  pour la fonction  $p$ . Elle doit effectuer 1000 simulations.  
 (b) Représenter  $\pi_n$  en fonction de  $n \in \llbracket 0; 100 \rrbracket$  pour  $p_n = \frac{1}{2(n+1)}$  puis  $p_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$ .  
 (c) Représenter  $\pi_{100}$  en fonction de  $\alpha \in [0; 6]$  pour  $p_n = \frac{1}{2(n+1)^\alpha}$ .
2. Exprimer  $\pi_n$  en fonction des  $p_k$ . On pourra considérer la suite  $u_n = \pi_n - \frac{1}{2}$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n$  quand  $p_n = \frac{1}{2(n+1)}$  puis  $p_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$ . Que se passe-t-il quand la pièce est équilibrée ?
4. Montrer que si  $p_k < \frac{1}{2}$  pour tout  $k$  entier, alors  $(\pi_n)_n$  tend vers une limite  $\ell \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .  
 Montrer que  $\ell = \frac{1}{2}$  si et seulement si la série  $\sum p_n$  diverge.