

Préparation à l'oral python - Feuille n°2

Exercice 1 (Centrale 2015)

1. Écrire une fonction $S(n, p)$ qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$ où $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$.
2. En déduire une fonction $test(n, p)$ qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k) , $\left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$ et $\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right)$. Que remarque-t-on ?

Soit $t > 0$ et $x \in [-1; 1]$.

3. Montrer
$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$$
4. On considère X variable aléatoire telle que $|X| \leq 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Pour $t > 0$, montrer que e^{tX} est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
5. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires centrées indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $|X_i| \leq a_i$ avec les $a_i > 0$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

6. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

7. En déduire
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\varepsilon / \left(2 \sum_{i=1}^n a_i^2\right)\right)$$

8. Commenter le résultat observé à la deuxième question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def S(n,p):
    return rd.binomial(n,p)/n

def test(n,p):
    tk=range(1,n+1)
    tS=[S(k,p) for k in tk]
    tp=[p+np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    tm=[p-np.sqrt(np.log(k)/k) for k in tk]
    plt.plot(tk,tS,'bo--');plt.plot(tk,tp,'r--');plt.plot(tk,tm,'r--')
    plt.grid();plt.show()
```

On observe :

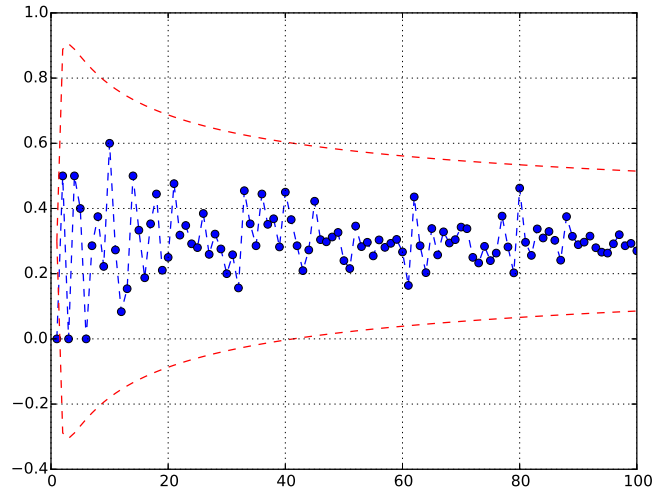


FIGURE 1 – Tracé des suites $(S_n)_n$, $\left(p + \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)_n$, $\left(p - \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)_n$

On conjecture que

La suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ semble presque sûrement coincée entre les deux autres suites.

3. Soit $(t, x) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$. On a

$$tx = \frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$$

avec $\frac{1}{2}(1-x), \frac{1}{2}(1+x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1$

Par convexité de l'exponentielle, on trouve

$$e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$$

4. Soit t réel. On a $0 \leq e^{tX} \leq e^t$ et par comparaison, la variable aléatoire e^{tX} est d'espérance finie. Avec l'inégalité précédemment obtenue, il vient

$$e^{tX} \leq \frac{1}{2}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)e^t$$

Puis, par croissance de l'espérance et en utilisant le fait que X est une variable centrée, on trouve $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$. Enfin, on a les développements en série entières

$$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

Par récurrence, on montre que $2^n n! \leq (2n)!$ pour tout n entier et on conclut

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

5. Soit t réel. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose $U_i = X_i/a_i$. On a

$$e^{tS_n} = \prod_{i=1}^n e^{tX_i} = \prod_{i=1}^n e^{ta_i U_i}$$

avec les U_i vérifiant les hypothèses de la question 4. Ainsi, les variables $e^{ta_i U_i}$ sont d'espérance finie et le produit de variables indépendantes d'espérance finies est d'espérance finie. Puis, on trouve

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{ta_i U_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{ta_i U_i}) \leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{t^2 a_i^2}{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t > 0$, on a après transformation de Chernoff et inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon}) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tS_n})$$

Et avec l'inégalité précédente, on conclut

$$\boxed{\forall t > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)}$$

7. On choisit t qui minimise le trinôme $t \mapsto -t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2$ et on obtient

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\varepsilon^2 / \left(2 \sum_{i=1}^n a_i^2\right)\right)}$$

8. En considérant $T_n = \sum_{i=1}^n (X_i - p)$ avec les X_i indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, on a $|X_i - p| \leq 1$ et par application de l'inégalité précédente, pour $\alpha > \sqrt{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(T_n > \alpha \sqrt{n \ln n}) \leq e^{-\frac{\alpha^2}{2} \ln n} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

Ainsi, pour $\alpha > \sqrt{2}$, la série $\sum \mathbb{P}(T_n > \alpha \sqrt{n \ln n})$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli (résultat non exigible en principe, classique mais difficile), on en déduit

$$\mathbb{P}(T_n > \alpha \sqrt{n \ln n} \text{ infiniment souvent}) = 0$$

d'où $T_n \leq \alpha \sqrt{n \ln(n)}$ à partir d'un certain rang presque sûrement

Comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre, on en déduit que l'événement

$$\bigcap_{\alpha \in]\sqrt{2}; +\infty[\cap \mathbb{Q}} \{T_n \leq \alpha \sqrt{n \ln n} \text{ à partir d'un certain rang}\}$$

est presque sûr, autrement dit

$$\mathbb{P}(T_n \leq \sqrt{2n \ln(n)} \text{ à partir d'un certain rang}) = 1$$

ce qui équivaut, avec les notations de la première question, à $S_n - p \leq \sqrt{2 \frac{\ln(n)}{n}}$ à partir d'un certain rang presque sûrement. Par un argument symétrique, on peut obtenir une minoration de la même forme et on conclut

$$\boxed{\text{Presque sûrement, à partir d'un certain rang, on a } S_n \in \left[p - \sqrt{2 \frac{\ln(n)}{n}} ; p + \sqrt{2 \frac{\ln(n)}{n}} \right].}$$

Remarque : il y a un facteur $\sqrt{2}$ en trop qu'on ne semble pas pouvoir améliorer en suivant la démarche du sujet, à moins que la conclusion attendue soit tout simplement d'annoncer que l'événement $\left\{ S_n \in \left[p - \sqrt{\frac{\ln n}{n}} ; p + \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \right] \right\}$ a une probabilité proche de 1 pour n grand, ce qui éviterait le recours (surréaliste) au lemme de Borel-Cantelli en fin de planche ...

Exercice 2 (Centrale 2022)

Un nombre de Carmichael est un entier $n \geq 2$ non premier tel que

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a^n \equiv a \pmod{n}$$

1. Soit $n \geq 2$ non premier tel que

$$\forall a \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket \quad a^n \equiv a \pmod{n}$$

Montrer que n est un nombre de Carmichael.

2. Écrire une fonction `carmichael(n)` d'argument n entier qui renvoie `True` si n est un nombre de Carmichael et `False` sinon.
3. Déterminer à l'aide de l'outil informatique le plus petit nombre de Carmichael.
4. Soit $n = \prod_{i=1}^r p_i$ avec $r \geq 2$ et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts vérifiant $p_i - 1 | n - 1$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$.

(a) Montrer $\forall i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^n \equiv a \pmod{p_i}$

(b) Montrer que n est un nombre de Carmichael.

5. Soit n un nombre de Carmichael. Montrer que n est un produit de nombres premiers deux à deux distincts.
6. Soit (G, \times) un groupe abélien fini.
 - (a) Soient x, y dans G avec $o(x) \wedge o(y) = 1$. Montrer que $o(xy) = o(x)o(y)$.
 - (b) Soit $x \in G$. Pour d diviseur de $o(x)$, montrer qu'il existe un élément de G d'ordre d .
 - (c) Soit m l'ordre maximal des éléments de G . Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m .

(d) En déduire $\forall p \in \mathcal{P} \quad \text{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

7. Soit n un nombre de Carmichael et p un diviseur premier de n . Montrer que $p-1 | n-1$.

Corrigé : 1. Soit n entier ≥ 2 vérifiant la condition annoncée et soit $a \in \mathbb{Z}$. D'après le théorème de la division euclidienne, on dispose d'un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket$ tel que $a = qn + r$. Dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, on a

$$\bar{a}^n = \bar{r}^n = \bar{r} = \bar{a}$$

Ainsi

L'entier n est un nombre de Carminchael.

2. Pour tester si un entier $n \geq 2$ est un nombre de Carmichael, on commence par tester sa non primalité. S'il existe d un diviseur strict de n , alors on a $d \leq \sqrt{n}$ ou $\frac{n}{d} \leq n$. Sinon, on aurait $d > \sqrt{n}$ et $\frac{n}{d} > \sqrt{n}$ d'où $n > n$ ce qui est absurde. On saisit :

```

def carmichael(n):
    d=2
    diviseur_trouve=False
    while d**2<=n and not diviseur_trouve:
        if n%d==0:
            diviseur_trouve=True
        d+=1
    if not diviseur_trouve:
        return False
    for k in range(n):
        if (k**n)%n!=k:
            return False
    return True

```

3. On saisit :

```

n=2
while not carmichael(n):
    n+=1
print("Premier nombre de Carmichael=",n)

```

On obtient :

```

Premier nombre de Carmichael= 561

```

On peut améliorer la performance de cette fonction en procédant différemment et en gardant la mémoire des nombres premiers rencontrés au cours des itérations :

```

P=[2]

def carmichael(n):
    global P
    est_premier=True
    for p in P:
        if n%p==0:
            est_premier=False
    if est_premier:
        P.append(n)
        return False
    for k in range(n):
        if (k**n)%n!=k:
            return False
    return True

```

Puis, on saisit en démarrant à $n = 3$ (on sait que 2 n'est pas de Carmichael puisqu'il n'est pas premier) :

```

n=3
while not carmichael(n):
    n+=1
print("Premier nombre de Carmichael=",n)

```

La liste P est enrichie à chaque appel de la fonction `carmichael` des nouveaux nombres premiers rencontrés ce qui permet d'accélérer le test de non primalité.

4.(a) Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $a \in \mathbb{Z}$. Si p_i divise a , alors p_i divise a^n et l'égalité a lieu. Supposons que p_i ne divise pas a ce qui équivaut à $a \wedge p_i = 1$. D'après le petit théorème de Fermat, on a donc

$$a^{p_i-1} \equiv 1 [p_i]$$

Comme $p_i - 1 | n - 1$, on dispose de q_i entier non nul tel que $n - 1 = q_i(p_i - 1)$. Par suite, il vient

$$a^n \equiv (a^{p_i-1})^{q_i} a \equiv a [p_i]$$

On conclut

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^n \equiv a [p_i]}$$

4.(b) Les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et sont donc deux à deux premiers entre eux. D'après le théorème chinois, l'application

$$\pi: \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \\ \bar{a}^{[n]} \longmapsto (\bar{a}^{[p_i]})_{1 \leq i \leq r} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Ainsi, pour $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$\overline{a^n}^{[n]} = \bar{a}^{[n]} \iff \pi(\overline{a^n}^{[n]}) = \pi(\bar{a}^{[n]}) \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \overline{a^n}^{[p_i]} = \bar{a}^{[p_i]}$$

et comme la dernière assertion est vraie d'après le résultat de la question précédente, on conclut

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est un nombre de Carmichael.}}$$

5. Supposons qu'il existe p premier et α entier ≥ 2 tel que $p^\alpha | n$. Comme le nombre n est de Carmichael, on a $p^n \equiv p [n]$ d'où $p^n \equiv p [p^2]$ ce qui signifie qu'on dispose de $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p^n = p + qp^2$ d'où

$$p(p^{n-2} - q) = 1$$

ce qui est absurde. Ainsi, les valuations des facteurs premiers dans la décomposition de n sont égales à 1 et il n'y a pas qu'un facteur premier sans quoi l'entier n serait premier. On conclut

$$\boxed{\text{Un nombre de Carmichael est produit de nombres premiers deux à deux distincts.}}$$

6.(a) On a $(xy)^{o(x)o(y)} = (x^{o(x)})^{o(y)}(y^{o(y)})^{o(x)} = 1$

d'où $o(xy) | o(x)o(y)$. Puis, on a $(xy)^{o(xy)} = 1$ d'où

$$(xy)^{o(xy)o(x)} = (x^{o(x)})^{o(xy)}y^{o(xy)o(x)} = y^{o(xy)o(y)} = 1$$

d'où $o(y) | o(xy)o(x)$ et comme $o(x) \wedge o(y) = 1$, il s'ensuit $o(y) | o(xy)$ d'après le lemme de Gauss. Par symétrie des rôles, on a également $o(x) | o(xy)$ d'où $o(x) \vee o(y) | o(xy)$. Or, on a

$$o(xy) = (o(x) \wedge o(y))(o(x) \vee o(y)) = o(x) \vee o(y)$$

Ceci prouve que $o(x)o(y) | o(x)o(y)$ et les entiers $o(xy)$ et $o(x)o(y)$ sont donc des entiers associés. On conclut

$$\boxed{o(xy) = o(x)o(y)}$$

Variante : On peut aussi observer

$$(xy)^{o(xy)} = 1 \iff \underbrace{x^{o(xy)}}_{\in \langle x \rangle} = \underbrace{y^{-o(xy)}}_{\in \langle y \rangle}$$

Or, l'intersection $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est sous-groupe de $\langle x \rangle$ et de $\langle y \rangle$ donc d'ordre divisant $o(x)$ et $o(y)$ d'où $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. On en déduit

$$x^{o(xy)} = 1 \quad \text{et} \quad y^{o(xy)} = 1$$

d'où $o(x)|o(xy)$ et $o(y)|o(xy)$ et on conclut comme précédemment.

6.(b) Soit $x \in G$ et d diviseur de $o(x)$. On dispose de c entier non nul tel que $o(x) = dc$. On a $(x^c)^d = x^{dc} = 1$ d'où $d|o(x^c)$. Puis, on a $(x^c)^{o(x^c)} = 1 = x^{co(x^c)}$ d'où $o(x)|co(x^c)$, c'est-à-dire $dc|co(x^c)$ d'où $d|o(x^c)$. Les entiers d et $o(x^c)$ sont associés donc égaux et par conséquent

$\boxed{\text{Il existe un élément de } G \text{ d'ordre } d.}$

6.(c) La quantité $\max\{o(x), x \in G\}$ est bien définie comme maximum d'une partie finie non vide. On note $m = \max\{o(x), x \in G\}$ et $x \in G$ tel que $o(x) = m$. Supposons qu'il existe $y \in G$ tel que $o(y)$ ne divise pas $o(x)$. Ainsi, on dispose de $q \in \mathcal{P}$ tel que $v_q(o(y)) > v_q(o(x))$. D'après le résultat de la question précédente, on dispose de $x' \in G$ d'ordre $\prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}} p^{v_p(o(x))}$ et de $y' \in G$ d'ordre $p^{v_p(o(y))}$. Or, on a

$$q^{v_q(o(y))} \wedge \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}} p^{v_p(o(x))} = 1$$

et d'après le résultat de la question 6.(a), on obtient

$$o(x'y') = o(x')o(y') = q^{v_q(o(y))} \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}} p^{v_p(o(x))} > o(x)$$

ce qui est absurde par maximalité de $o(x)$. On conclut

$\boxed{\text{L'ordre de tout élément de } G \text{ divise } m.}$

6.(d) Soit $p \in \mathcal{P}$. Le groupe $(U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est d'ordre $p - 1$. Notons m l'ordre maximal des éléments de G . On a $\bar{x}^m = \bar{1}$ pour tout $\bar{x} \in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ d'après le résultat de la question précédente. Comme l'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps, le polynôme $X^m - \bar{1}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ admet au plus m racines distinctes (résultat qui n'est pas officiellement au programme, à savoir redémontrer par récurrence sur le degré avec une factorisation de Bernoulli). Ainsi, on a $p - 1 \leq m$ et comme l'ordre d'un élément d'un groupe divise l'ordre du groupe, on a aussi $m|p - 1$ d'où $m \leq p - 1$ et par conséquent $m = p - 1$ ce qui prouve que le groupe $(U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ admet un générateur. On conclut

$$\boxed{\forall p \in \mathcal{P} \quad U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p - 1)\mathbb{Z}}$$

7. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on a $a^n \equiv a \pmod{n}$ d'où $a^n \equiv a \pmod{p}$. Pour $a \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$, on a $\bar{a} \in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et il vient

$$\bar{a}^{n-1} = \bar{a}^{-1}\bar{a}^n = \bar{a}^{-1}\bar{a} = \bar{1}$$

Comme le groupe $(U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est cyclique, on choisit $a \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$ d'ordre égal à $p - 1$. Ainsi, on trouve

$$\boxed{o(\bar{a}) = p - 1 | n - 1}$$

Commentaire : On a donc établi l'équivalence suivante :

Le nombre $n \geq 2$ est de Carmichael si et seulement si $n = \prod_{i=1}^r p_i$ avec $r \geq 2$ et les p_i des nombres premiers distincts vérifiant $p_i - 1 | n - 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

Exercice 3 (Centrale 2022)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_{-1}^1 (1+t)^n e^{-nt} dt$

1. Représenter les termes de la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n \in \llbracket 100; 500 \rrbracket}$. Qu'observe-t-on ?

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (1+t)e^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\quad \varphi(t) = -\frac{1}{t^2} \ln f(t)$$

2. Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en zéro. Que peut-on dire de $\varphi(t)$ lorsque $t \rightarrow -1$?

3. À l'aide de l'outil informatique, établir l'existence de $a > 0$ tel que

$$\forall t \in]-1; 1[\quad \varphi(t) \geq a$$

On pose $\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \quad f_n(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$

4. Établir $\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$

5. En déduire $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = \int_1^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt$

6. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! = e^{-n} n^{n+1} (I_n + J_n)$

7. Établir $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$

Retrouver la formule de Stirling.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def I(n):
    return integr.quad(lambda t: np.exp(-n*t)*(1+t)**n, -1, 1)[0]

tn=range(100, 501)
trI=[np.sqrt(n)*I(n) for n in tn]
plt.plot(tn, trI)
plt.show()
```

On observe :

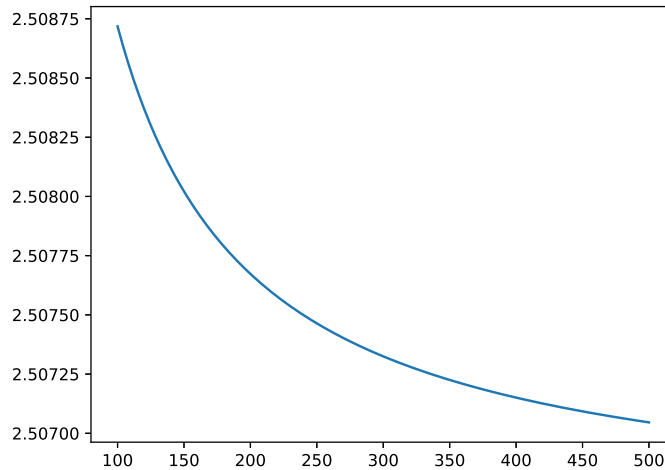


FIGURE 2 – Tracé de la suite $(\sqrt{n}I_n)_n$

On peut conjecturer

La suite $(\sqrt{n}I_n)_n$ converge.

2. Soit $t > -1$ avec $t \neq 0$. On a

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t^2} (\ln(1+t) - t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{t^2} \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) - t \right) \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow -1}{\sim} -\ln(1+t)$$

Ainsi

La fonction φ se prolonge par continuité en zéro et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow -1}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans toute la suite, on confond φ avec son prolongement par continuité en zéro.

3. On saisit :

```
def phi(t):
    if t!=0:
        return -(np.log(1+t)-t)/t**2
    else:
        return .5

tt=np.linspace(-1,1,100)
tphi=[phi(t) for t in tt]
plt.plot(tt,tphi)
plt.show()
```

On observe :

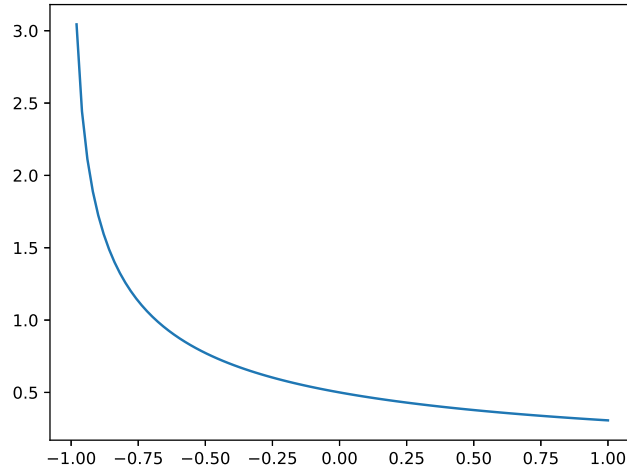


FIGURE 3 – Graphe de $y = \varphi(x)$

On conjecture que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ décroît sur }]-1; 1[.}$$

Par dérivation, il vient pour $t > -1$ et $t \neq 0$

$$\varphi'(t) = \frac{N(t)}{(1+t)t^3} \quad \text{avec} \quad N(t) = 2(1+t)\ln(1+t) - 2t - t^2$$

puis

$$N'(t) = 2(\ln(1+t) - t)$$

On a $N'(t) \leq 0$ par concavité de \ln et $N(0) = 0$. La fonction N prend des valeurs positives sur $] -1; 0[$ et négatives sur $] 0; 1[$. Par conséquent, la fonction φ' est négative sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$ et on en déduit la décroissance de φ sur $] -1; 1[$ et comme $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1 - \ln 2 > 0$, on conclut

$$\boxed{\forall t \in]-1; 1[\quad \varphi(t) \geq a \quad \text{avec} \quad a = 1 - \ln 2 > 0}$$

4. Soit $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times]-1; 1[$. On a $1 + \frac{t}{\sqrt{n}} > 0$ pour n assez grand et

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{nt}\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{nt}\right) \\ f_n(t) &= \exp\left(-\frac{t^2}{2} + o(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

5. Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du$$

On pose $\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } |u| < \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n}I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) du$

Soit n entier non nul et $u \in]-\sqrt{n}; \sqrt{n}[$. On a

$$g_n(u) = \exp\left(-u^2 \varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-au^2)$$

et la majoration vaut aussi pour $|u| \geq \sqrt{n}$. La fonction $u \mapsto e^{-au^2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et on conclut par convergence dominée

$$\sqrt{n}I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

6. Soit n entier non nul. Par relation de Chasles puis changement de variables, il vient

$$I_n + J_n = \int_{-1}^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu+n} du = e^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du$$

Avec le changement de variables $v = nu$ et des intégrations parties, on obtient

$$I_n + J_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n e^{-v} dv = \frac{e^n}{n^{n+1}} n!$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! = e^{-n} n^{n+1} (I_n + J_n)}$$

7. Soit n entier non nul. Avec le changement de variables $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du$$

On pose $\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$
$$h_n(u) = \begin{cases} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} & \text{si } u \geq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sans difficulté, on trouve $\forall u \geq 0 \quad h_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Soit $u \geq 0$. On pose $\forall x > 0 \quad \psi(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - ux$

La fonction ψ est dérivable et il vient

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \psi'(x) &= 2x \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - \frac{t}{1 + u/x} - u \\ &= \frac{2x}{1 + u/x} \left[\left(1 + \frac{u}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - \frac{u}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{x}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

On pose enfin $\forall s \geq 0 \quad \chi(s) = (1+s) \ln(1+s) - s - \frac{s^2}{2}$

La fonction χ est dérivable et on trouve par concavité du \ln

$$\forall s \geq 0 \quad \chi'(s) = \ln(1+s) + 1 - 1 - s \leq 0$$

Avec $\chi(0) = 0$, il s'ensuit que $\chi(s) \leq 0$ pour $s \geq 0$ d'où

$$\forall x > 0 \quad \psi'(x) = \frac{2x}{1+u/x} \chi\left(\frac{u}{x}\right) \leq 0$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \psi(\sqrt{n}) \leq \psi(1)$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n} \leq \ln(1+u) - u$$

et passant à l'exponentielle qui est croissante, on obtient

$$\forall (n, u) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad h_n(u) \leq (1+u)e^{-u}$$

Cette dominante est intégrable et par convergence dominée, il vient

$$\sqrt{n}J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

D'où

$$\boxed{J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)}$$

Il s'ensuit

$$n! = e^{-n}n^{n+1} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

Et on conclut

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$