ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral python - Feuille n°3

Exercice 1 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \text{Arctan}\,(n+1) - \text{Arctan}\, n$

   (a) Soit $(\varepsilon_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $\text{S} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme suit

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant u_0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k + u_{n+1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   i. Écrire une fonction `suite(x,n)` qui renvoie $\sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$.

   ii. Tester la fonction pour différentes valeurs de x et $n \in \{100, 1000, 10000\}$.

   iii. Conjecturer le comportement de la suite.

   (c) Démontrer la conjecture.

2. Soit $(u_n)_n$ vérifiant

$$(\text{H}) : \begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ (u_n)_n \text{ décroissante positive} \end{cases}$$

   Soit $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $x \in [\,0\,;\lambda\,]$. On définit $(\varepsilon_n(x))_n$ comme précédemment. On pose

$$(\text{P}) : \forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$$

   (a) On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{2}{3^{n+1}}$

   i. Montrer que $(u_n)_n$ vérifie (H).

   ii. Adapter la fonction `suite` et la tester pour $x \in \{0.25, 0.5, 0.75, 0.95\}$ et plusieurs valeurs de n.

   iii. La suite $(u_n)_n$ vérifie-t-elle (P) ? Justifier.

   (b) Déterminer une condition nécessaire suffisante sur $(u_n)_n$ pour qu'elle vérifie (P).

Corrigé : 1.(a) On a clairement

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \varepsilon_n u_n \leqslant u_n$$

et la série téléscopique $\sum u_n$ converge puisque $(\text{Arctan}\, n)_n$ admet une limite finie. Par sommation, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}\, n - \text{Arctan}\, 0$$

On conclut $\boxed{\text{La série } \sum \varepsilon_n u_n \text{ converge avec } \mathrm{S} \in [\,0\,;\lambda\,] \text{ où } \lambda = \dfrac{\pi}{2}.}$

1.(b).i On saisit :

```
def u(n):
    return np.arctan(n+1)-np.arctan(n)

def suite(x,n):
    res=0
    for k in range(n+1):
        eps=1
        if x<=res+u(k):
            eps=0
        res+=eps*u(k)
    return res
```

1.(b).ii On expérimente :

```
>>> [suite(.56,n) for n in [100,1000,10000]]
[0.5599339443580329, 0.55999950523120989, 0.55999999942273004]
>>> [suite(1.1,n) for n in [100,1000,10000]]
[1.0999701608014529, 1.0999998581851047, 1.0999999999952632]
>>> [suite(1.5,n) for n in [100,1000,10000]]
[1.4999936575245283, 1.4999999863580609, 1.4999999999975726]
```

1.(b).iii On conjecture $\boxed{\forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k = x}$

1.(c) Soit $x \in [\,0\,;\mathrm{S}\,]$. Pour n entier, on note $x_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(x) u_k$. D'après la conjecture, on aurait $x - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k$ d'où $0 \leqslant x - x_n \leqslant \mathrm{R}_n$ avec $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Dans tout ce qui suit, on observe qu'il faut avoir $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier pour espérer faire tourner une récurrence. Montrons en premier lieu cette propriété. Soit n entier. On a

$$\tan u_n = \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \frac{1}{1+n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n+1)\right)$$

d'où $$u_n \leqslant \mathrm{R}_n$$

On note $$\mathscr{P}(n): \quad 0 \leqslant x - x_n \leqslant \mathrm{R}_n$$

• **Initialisation :** Si $x \leqslant u_0$, alors $\varepsilon_0(x) = 0$ d'où $x_0 = 0 \leqslant x$ et $x \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{R}_0 = x_0 + \mathrm{R}_0$. Si $x > u_0$, alors $\varepsilon_0(x) = 1$ puis $x_0 = u_0 < x$ et $x_0 + \mathrm{R}_0 = \mathrm{S} \geqslant x$ ce qui clôt l'initialisation.

• **Hérédité :** Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Si $x \leqslant x_n + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1}(x) = 0$ d'où $x_{n+1} = x_n \leqslant x$ puis, sachant $u_{n+1} \leqslant \mathrm{R}_{n+1}$, on obtient

$$x \leqslant x_n + u_{n+1} = x_{n+1} + u_{n+1} \leqslant x_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1}$$

Si $x > x_n + u_{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1}(x) = 1$ d'où $x_{n+1} = x_n + u_{n+1} < x$ et

$$x \leqslant x_n + \mathrm{R}_n = x_n + u_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1} = x_{n+1} + \mathrm{R}_{n+1}$$

ce qui clôt la récurrence.

Le reste d'une série convergente étant une suite de limite nulle, on conclut

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;\lambda\,] \qquad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k}$$

2.(a).i La série $\sum u_n$ converge par critère de Riemann et la suite $(u_n)_n$ est clairement décroissante positive d'où

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ vérifie (H).}}$$

2.(a).ii On saisit :

```
def u(n):
    return 2/3**(n+1)
```

On observe :

```
>>> suite(.25,10000)
0.24999999999999992
>>> suite(.5,10000)
0.33333333333333315
>>> suite(.75,10000)
0.7499999999999999
>>> suite(.95,10000)
0.9259259259259256
```

Il semble que la suite $(u_n)_n$ proposée ne vérifie pas la propriété (P).

2.(a).iii Soit $x = \dfrac{1}{2}$. On a $u_0 = \dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $\varepsilon_0(x) = 0$ puis $u_0 = 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k(x) u_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

On conclut $\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ ne vérifie pas la propriété (P).}}$

2.(b) Avec la suite $(u_n)_n$ de l'exemple précédent, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{2}{3^{n+1}} = u_n$$

Il semble que la condition $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier soit nécessaire. Considérons une suite $(u_n)_n$ qui vérifie (P) sans vérifier $u_n \leqslant \mathrm{R}_n$ pour tout n entier. Il existe donc N entier tel que $u_\mathrm{N} > \mathrm{R}_\mathrm{N}$. S'il existe $n \in [\![\,0\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ tel que $\varepsilon_n(x) = 1$, on aurait $x \geqslant u_n \geqslant u_\mathrm{N}$ par décroissance, ce qui est faux. Pour $x \in \,]\,\mathrm{R}_\mathrm{N}\,;u_\mathrm{N}\,[$, on a $\varepsilon_n(x) = 0$ pour tout $n \in [\![\,0\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ puis

$$x = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \varepsilon_n(x) u_n \leqslant \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n \leqslant \mathrm{R}_\mathrm{N}$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Soit } (u_n)_n \text{ vérifiant (H). On a } (u_n)_n \text{ vérifie (P) si et seulement si } u_n \leqslant \mathrm{R}_n \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Commentaire : On peut interpréter le résultat ainsi : pour pouvoir approcher n'importe quel nombre $x \in [\,0\,;\lambda\,]$, il faut que la décroissance de $(u_n)_n$ ne soit pas trop forte. Sinon, les contributions chargées par les ε_n égaux à 1 ne suffisent plus pour « recoller » à x.

Exercice 2 (Centrale 2021)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé. On pose $P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. On définit enfin une suite matrices par

$$A_0 = A \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad A_{k+1} = A_k - P(A_k)P'(A_k)^{-1}$$

1. Montrer que $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ et que P(A) est nilpotente.
2. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit U une matrice de $\mathscr{M}_5(\mathbb{R})$ à coefficients dans $]\,0\,;1\,[$ choisie aléatoirement et $A = UBU^{-1}$.
   (a) Calculer P et P′ manuellement.
   (b) Avec l'outil informatique, calculer les A_k pour $k \in [\![0\,; 4]\!]$. On pose $D = A_4$ et $N = A - D$. Calculer N, N^2, N^3, ND et DN. Qu'observe-t-on ?
3. On revient au cas général. Vérifier que $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et montrer que $\mathbb{K}[A] \cap GL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P'(M)$ soit inversible. Montrer qu'il existe une matrice $M_1 \in \mathbb{K}[M]$ telle que
$$Q\left(M - P(M)P'(M)^{-1}\right) = Q(M) - P(M)P'(M)^{-1}Q'(M) + \left(P(M)P'(M)^{-1}\right)^2 M_1$$
5. Montrer que pour tout k entier, on a $P'(A_k)$ inversible et qu'il existe $B_k \in \mathbb{K}[A]$ tel que $P(A_k) = P(A)^{2^k}B_k$.
6. En déduire qu'il existe une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que $A = D + N$ et $DN = ND$.

Corrigé : 1. On a $\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Par conséquent, pour $i \in [\![1\,; r]\!]$, le scalaire λ_i est racine de χ'_A de multiplicité $m_i - 1$ et on en déduit

$$\chi_A \wedge \chi'_A = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i - 1}$$

D'où $$\boxed{P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \quad \text{et} \quad P(A)^n = \prod_{i=1}^{r}(A - \lambda_i I_n)^{m_i + n - m_i} = \chi_A(A)Q(A) = 0}$$

2.(a) La matrice B est triangulaire et en appliquant ce qui précède, on trouve

On trouve $$\boxed{P = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2 \quad \text{et} \quad P' = 2X - 3}$$

2.(b) On saisit :

```
B=np.array([[1,3,6,0,0],
            [0,1,3,0,0],
            [0,0,1,0,0],
            [0,0,0,2,6],
            [0,0,0,0,2]])
```

```
I5=np.eye(5)

U=rd.rand(5,5)
A=np.dot(U,np.dot(B,alg.inv(U)))


def P(M):
    return M.dot(M)-3*M+2*I5

def dP(M):
    return 2*M-3*I5

tA=[A]
for k in range(1,5):
    Ak=tA[-1]
    tA.append(Ak-np.dot(P(Ak),alg.inv(dP(Ak))))
```

On observe $\boxed{\text{La matrice N est nilpotente et } \mathrm{DN} = \mathrm{ND}.}$

3. Sans difficulté, l'application $\varphi : \mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{Q} \mapsto \mathrm{Q}(\mathrm{A})$ est un morphisme d'algèbres et par conséquent

$$\boxed{\mathbb{K}[\mathrm{A}] = \mathrm{Im}\ \varphi \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

On a clairement $\mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par produit et contenant I_n. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) \in \mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a $\pi_\mathrm{A} \wedge \mathrm{Q} = 1$. En effet, supposons que $\mathrm{D} = \pi_\mathrm{A} \wedge \mathrm{Q} \neq 1$. On a $\mathrm{Q} = \mathrm{DR}$ et $\pi_\mathrm{A} = \mathrm{DS}$ avec D non nul puisque π_A ne l'est pas donc D non constant puisque D est unitaire et $\neq 1$. On trouve

$$\mathrm{S}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) = \pi_\mathrm{A}(\mathrm{A})\mathrm{R}(\mathrm{A}) = 0$$

et comme Q(A) est inversible, il s'ensuit $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = 0$ avec $\deg \mathrm{S} < \deg \pi_\mathrm{A}$ ce qui est absurde. Par la relation de Bézout, on dispose de U, V dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\pi_a\mathrm{U} + \mathrm{QV} = 1$ d'où $\mathrm{Q}(\mathrm{A})\mathrm{V}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$ ce qui prouve que l'inverse de Q(A) est dans $\mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}[\mathrm{A}] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).}$$

4. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. D'après la formule de Taylor, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \qquad \mathrm{Q}(x + y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} y^k \mathrm{Q}^{(k)}(x)$$

Soit $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1} = \mathrm{R}(\mathrm{M})$. On a

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad \mathrm{Q}(x - \mathrm{P}(x)\mathrm{R}(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\mathrm{P}(x)\mathrm{R}(x)\right)^k \mathrm{Q}^{(k)}(x)$$

d'où $$\mathrm{Q}(\mathrm{X} - \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{R}(\mathrm{X})) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{R}(\mathrm{X})\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{R}(\mathrm{X})\right)^2 \mathrm{S}(\mathrm{X})$$

avec $$\mathrm{S}(\mathrm{X}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\mathrm{P}(x)\mathrm{R}(x)\right)^{k-2} \mathrm{Q}^{(k)}(\mathrm{X})$$

Ainsi $$\mathrm{Q}(\mathrm{M} - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{R}(\mathrm{M})) = \mathrm{Q}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{R}(\mathrm{M})\mathrm{Q}'(\mathrm{M}) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{R}(\mathrm{M})\right)^2 \mathrm{S}(\mathrm{M})$$

On conclut donc

$$\boxed{\exists \mathrm{M}_1 \in \mathbb{K}[\mathrm{M}] \quad \mid \quad \mathrm{Q}\left(\mathrm{M}-\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right) = \mathrm{Q}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\mathrm{Q}'(\mathrm{M}) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{P}'(\mathrm{M})^{-1}\right)^2 \mathrm{M}_1}$$

5. On procède par récurrence. On a $\mathrm{P}'(\mathrm{A})$ inversible puisque $\pi_\mathrm{A} \wedge \mathrm{P}' = 1$. On applique ce qui précède avec $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ et $\mathrm{M} = \mathrm{A}_k$. On obtient

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k) + \left(\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-1}\right)^2 \mathrm{R}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)^2\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-2}\mathrm{R}(\mathrm{A}_k)$$

Par récurrence, on a $\mathrm{A}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$ et ainsi

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{k+1}) = \left(\mathrm{P}(\mathrm{A})^{2^k}\mathrm{B}_k\right)^2 \mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)^{-2}\mathrm{R}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^{2^{k+1}}\mathrm{B}_{k+1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}_{k+1} \in \mathbb{K}[\mathrm{A}]$$

Puis, on a $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' = 1$ d'où l'existence de U et V dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{PU} + \mathrm{P}'\mathrm{V} = 1$. Ainsi

$$\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)\mathrm{V}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{U}(\mathrm{A}_k)$$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est nilpotente, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ aussi et donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\mathrm{U}(\mathrm{A}_k)$ également et quitte à trigonaliser, on constate que $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)\mathrm{V}(\mathrm{A}_k)$ est inversible d'où $\mathrm{P}'(\mathrm{A}_k)$ également. On conclut

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}'(\mathrm{A}_k) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exists \mathrm{B}_k \in \mathbb{K}[\mathrm{A}] \mid \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = \mathrm{P}(\mathrm{A})^{2^k}\mathrm{B}_k}$$

6. Si $2^k \geqslant n$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{A}_k) = 0$ d'où $\mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_k$, autrement dit la suite stationne en une matrice qu'on note D. On a $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0$ d'où D diagonalisable et

$$\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{D} = \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} [\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_{i+1}] = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\mathrm{P}'(\mathrm{A}_i)^{-1}$$

qui est nilpotente comme somme de matrices nilpotentes et qui commutent. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{A}_k)_k \text{ stationne en D diagonalisable et telle que } \mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{D} \text{ nilpotente et commute avec D.}}$$

Exercice 3 (Centrale 2019)

On effectue n lancers de pièces indépendants et la probabilité d'obtenir pile au k-ième lancer est notée p_k. On note X_n le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers et π_n la probabilité que X_n soit pair.

1. (a) Écrire une fonction `pi(n,p)` qui donne une estimation de π_n pour la fonction p. Elle doit effectuer 1000 simulations.
   (b) Représenter π_n en fonction de $n \in [\![0\,; 100]\!]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$.
   (c) Représenter π_{100} en fonction de $\alpha \in [\,0\,;6\,]$ pour $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^\alpha}$.
2. Exprimer π_n en fonction des p_k. On pourra considérer la suite $u_n = \pi_n - \dfrac{1}{2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n$ quand $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ puis $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$. Que se passe-t-il quand la pièce est équilibrée ?
4. Montrer que si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier, alors $(\pi_n)_n$ tend vers une limite $\ell \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
   Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la série $\sum p_n$ diverge.

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
def pi(n,p):
    N=1000
    res=0
    for i in range(N):
        S=0
        for k in range(1,n+1):
            if rd.rand()<p(k):
                S+=1
        if S%2==0:
            res+=1
    return res/N
```

1.(b) On saisit :

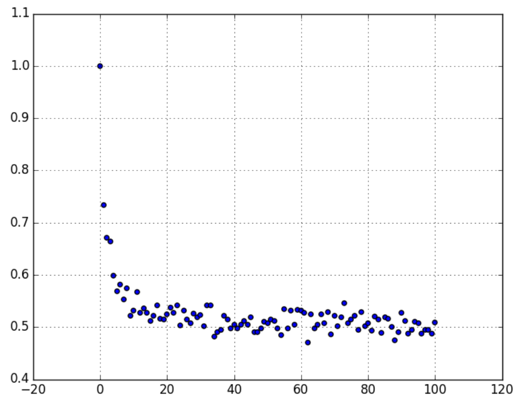
```
def p1(n):
    return 1/(2*(n+1))

def p2(n):
    return 1/(2*(n+1)**2)

tn=range(101)
tpi1=[pi(n,p1) for n in tn]
plt.scatter(tn,tpi1)
plt.grid();plt.show()

tpi2=[pi(n,p2) for n in tn]
plt.scatter(tn,tpi2)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :



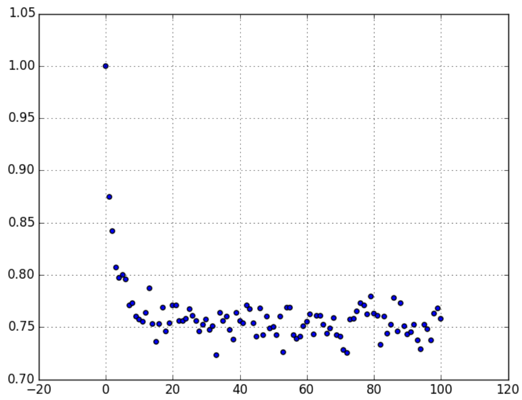


FIGURE 1 – Tracé de $(\pi_n)_n$

On conjecture que pour chacun des scénarios considérés

$$\boxed{\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}}$$

1.(c) On saisit :

```
ta=np.linspace(0,6,100)
tpi3=[pi(100,lambda n:1/(2*(n+1)**a)) for a in ta]
plt.plot(ta,tpi3)
plt.grid();plt.show()
```

On observe :

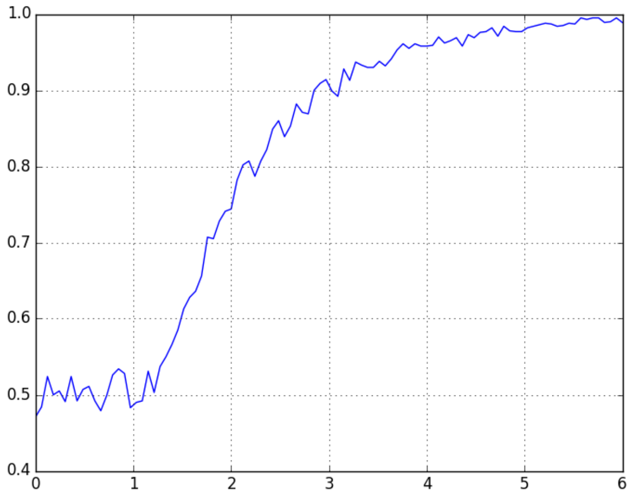


FIGURE 2 – Tracé du graphe $\alpha \mapsto \pi_{100}$

On conjecture $$\boxed{\forall \alpha \in [\,0\,;1\,] \qquad \lim_{n\to+\infty} \pi_n = \frac{1}{2}}$$

2. Soit n entier. D'après la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} \text{ pair}, \mathrm{X}_n \text{ pair}) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} \text{ pair}, \mathrm{X}_n \text{ impair})\\ &= \mathbb{P}(\mathrm{F}_{n+1}, \mathrm{X}_n \text{ pair}) + \mathbb{P}(\mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{X}_n \text{ impair})\end{aligned}$$

Par indépendance des lancers, on trouve

$$\pi_{n+1} = (1 - p_{n+1})\pi_n + p_{n+1}(1 - \pi_n)$$

Puis $$u_{n+1} + \frac{1}{2} = (1 - p_{n+1})\left(u_n + \frac{1}{2}\right) + p_{n+1}\left(\frac{1}{2} - u_n\right)$$

d'où $$u_{n+1} = (1 - 2p_{n+1})u_n$$

Par ailleurs, on a $\pi_0 = 1$ d'où $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on en déduit, par récurrence ou avec un produit téléscopique

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - p_k\right)}$$

3. On suppose $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ pour n entier. On a

$$u_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et par conséquent $\boxed{\text{Si } p_n = \dfrac{1}{2(n+1)} \text{ pour } n \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}.}$

On suppose ensuite $p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2}$ pour n entier. On a

$$u_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

Ainsi $\boxed{\text{Si } p_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2} \text{ pour } n \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}.}$

4. Soit n entier. On a $\qquad \ln(u_n) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \ln(1-2p_k)$

Supposons $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour tout k entier. Il s'ensuit $1 \geqslant 1-2p_k > 0$ pour tout k entier. La série $\sum \ln(1-2p_k)$ est donc à terme négatifs. Si $(p_k)_k$ ne tend pas vers zéro, la série diverge grossièrement donc sa somme partielle tend vers $-\infty$. Si $(p_k)_k$ tend vers zéro, on a $\ln(1-2p_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -2p_k$ et les séries $\sum \ln(1-2p_k)$ et $\sum p_k$ sont donc de même nature. Si $\sum p_k$ diverge, la somme partielle de la série $\sum \ln(1-2p_k)$ tend vers $-\infty$ et sinon, elle tend vers une limite finie négative S d'où $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{S}})$. On conclut

$$\boxed{\text{Si } p_k < \frac{1}{2} \text{ pour } k \text{ entier, alors } \pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right].}$$

Et l'étude précédente montrer que si $\sum p_n$ diverge, alors $\ell = \dfrac{1}{2}$ et si $\sum p_n$ converge, alors on a $\ell \in \left]\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. Ainsi

$$\boxed{\ell = \frac{1}{2} \iff \sum p_n \text{ diverge}}$$

Remarque : Si $p_k < \dfrac{1}{2}$ pour k entier, on peut aussi observer

$$u_{n+1} = (1-2p_{n+1})u_n < u_n$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente dans $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ d'où le premier résultat annoncé sur ℓ.