

Préparation à l'oral - Feuille n°5

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

- (a) Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E .
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|_1 \leq k\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$ est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
- Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Corrigé : Exercice 37 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble des matrices commutant avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Corrigé : Exercice 73 CCPINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit n entier non nul et E ensemble à n éléments.

- Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Corrigé : Exercice 112 CCPINP 2025

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

Montrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2t} - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$$

Corrigé : On note $I =]0; +\infty[$ et on pose

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times I \quad f_n(t) = te^{-(3n+2)t}$$

Soit n entier. On a $f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où $f_n \in L^1(I, \mathbb{R})$ par comparaison et critère de Riemann. Pour $t \in I$, la série $\sum f_n(t)$ est géométrique de raison $e^{-3t} \in]0; 1[$ donc convergente avec

$$\forall t \in I \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{te^{-2t}}{1 - e^{-3t}} = \frac{t}{e^{2t} - e^{-t}}$$

et on en déduit que la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I . Soit n entier. Les

fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{e^{-(3n+2)t}}{3n+2}$ sont de classe \mathcal{C}^1 avec le crochet $\left[-\frac{te^{-(3n+2)t}}{3n+2} \right]_0^{+\infty}$ fini et nul.

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-(3n+2)t} dt = \left[-\frac{te^{-(3n+2)t}}{3n+2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{3n+2} \int_0^{+\infty} e^{-(3n+2)t} dt = \frac{1}{(3n+2)^2}$$

d'où
$$\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum \frac{1}{(3n+2)^2}$$

qui converge par critère de Riemann. Par intégration terme à terme, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2t} - e^{-t}} dt$ converge avec l'égalité

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{2t} - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

Soit n entier non nul et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f(F)$ est fermé dans \mathbb{R}^n . On suppose également que $df(a)$ est bijective pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. On note $X = f(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer $\forall x \in X \quad T_x X = \mathbb{R}^n$
2. Établir que $X = \mathbb{R}^n$. On pourra raisonner par l'absurde.

Corrigé : 1. Soit $x \in X$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \in f^{-1}(\{x\})$. Comme $df(a)$ est bijective, on dispose de $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(a) \cdot u = v$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) = a + tu$$

On a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable en zéro avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = u$. On pose ensuite

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \eta(t) = f \circ \gamma(t)$$

L'arc η est à valeurs dans X et dérivable par composition. On trouve

$$\eta'(0) = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = df(a) \cdot u = v$$

On a donc prouvé que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dans $T_x X$ et l'inclusion réciproque étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\forall x \in X \quad T_x X = \mathbb{R}^n}$$

2. Supposons $X \neq \mathbb{R}^n$. Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = \|y - x\|^2$$

Soit $x_0 \in X$. On note $r = \|x_0 - y\| > 0$ et on pose $K = X \cap B_f(y, r+1)$. L'ensemble K est un fermé (intersection de fermés) borné donc un compact de l'espace \mathbb{R}^n de dimension finie. La fonction continue g atteint un minimum en un point x_1 sur ce compact K . On a clairement

$x_0 \in K$ d'où $g(x_1) \leq g(x_0) = r^2$ et il s'ensuit que $x_1 \in B(y, r + 1)$. Par conséquent, le point x_1 est un extremum local de la restriction $g|_X$ et on en déduit

$$T_{x_1}X \subset \text{Ker } dg(x_1)$$

Avec le résultat de la première question, il en résulte que $dg(x_1) = 0$. Par ailleurs, on trouve

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad dg(x_1) \cdot h = 2 \langle h, x_1 - y \rangle$$

Ainsi, on a $x_1 - y \in (\mathbb{R}^n)^\perp$ d'où $y = x_1$ ce qui contredit $y \notin X$. On conclut

$$\boxed{X = \mathbb{R}^n}$$

Exercice 6 (Mines 2025)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M_n = \text{Max}_{\sigma \in S_n} o(\sigma)$

1. Établir $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq M_n \leq n!$

2. Soit $n \geq 4$. Montrer $M_n \leq \text{Max}_{2 \leq k \leq n-1} kM_{n-k}$

3. Établir $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(3^{n/3})$

Corrigé : 1. Pour $\sigma \in S_n$, on a $o(\sigma) | \text{Card } S_n = n!$ et on observe $o(c) = n$ avec $c = (1 \ 2 \ \dots \ n)$.

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leq M_n \leq n!}$$

2. Soit $n \geq 4$. Pour $\sigma \in S_n$ avec $\sigma(n) = n$, on note $\sigma' \in S_{n-1}$ la permutation induite par σ et on a $o(\sigma') = o(\sigma)$. On en déduit $M_{n-1} \leq M_n$ d'où la croissance de la suite $(M_n)_{n \geq 1}$. Soit $\sigma \in S_n$.

On note $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints avec $\sum_{i=1}^r \ell_i = n$ où $\ell_i = |\text{supp } c_i|$ (les points fixes sont associés à des cycles de longueur égale à 1). Si $r = 1$, on a $o(\sigma) = o(c_1) = n$. Si $r \geq 2$, on a $\sigma = c_1 \gamma$ avec $\gamma = \prod_{i=2}^r c_i$ qui commute avec c_1 et pour k entier, il vient $\sigma^k = c_1^k \gamma^k$ d'où

$$\sigma^k = \text{id} \iff c_1^k = \text{id} \quad \text{et} \quad \gamma^k = \text{id} \iff o(c_1) \vee o(\gamma) | k$$

Par minimalité, on a donc $o(\sigma) = o(c_1) \vee o(\gamma) \leq o(c_1) o(\gamma)$

On suppose $\ell_1 \geq 2$ car sinon, on a $o(c_1) o(\gamma) = o(\gamma) \leq M_{n-1}$ et on sait que la suite $(M_n)_n$ croît. On a donc pour $\ell_1 \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$

$$o(\sigma) \leq \ell_1 M_{n-\ell_1} \leq \text{Max}_{2 \leq k \leq n-1} k M_{n-k}$$

Enfin, on observe $2M_{n-2} \geq 2(n-2) \geq n$

d'où $\text{Max}_{2 \leq k \leq n-1} k M_{n-k} \geq n$

On conclut

$$\boxed{M_n \leq \text{Max}_{2 \leq k \leq n-1} k M_{n-k}}$$

3. On suppose qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ avec $n \geq 4$, on a $M_k \leq C3^{k/3}$. D'après l'inégalité établie précédemment, il vient

$$M_n \leq \max_{2 \leq k \leq n-1} k M_{n-k} \leq C \max_{2 \leq k \leq n-1} k 3^{(n-k)/3} = C 3^{n/3} \max_{2 \leq k \leq n-1} k 3^{-n/3}$$

On pose $\forall x \geq 0 \quad f(x) = x 3^{-x/3}$

La fonction f est dérivable et on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = 3^{-x/3} (1 + x \ln(3^{-1/3}))$$

On en déduit que f croît sur $[0; 3/\ln(3)]$ puis décroît sur $[3/\ln(3); +\infty]$. On a

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] = 3$$

Par concavité, on a $\ln(x) < x - 1$ pour $x > 1$ d'où

$$\ln(\ln(3)) < \ln(3) - 1$$

et passant à l'exponentielle croissante $\ln(3) < 3e^{-1}$

d'où $f\left(\frac{3}{\ln(3)}\right) = \frac{3}{e \ln(3)} > 1$

ce qui ne permet pas de conclure ! On a $e < 3$ d'où $1 < \ln(3)$ puis $3/\ln(3) < 3$. Par ailleurs, avec l'inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$ pour x réel, il vient

$$\int_0^{\frac{3}{2}} e^t dt = e^{\frac{3}{2}} - 1 \geq \int_0^{\frac{3}{2}} (1+t) dt = \frac{21}{8} > 2$$

d'où $\ln(3) < 3/2$ ce qui équivaut à $2 < \ln(3)/3$. D'après l'étude de variations faite précédemment, on en déduit

$$\max_{k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket} f(k) = \max(f(2), f(3))$$

Enfin, on trouve $f(3) = 1$ et on a les équivalences

$$f(2) < 1 \iff 2 \times 3^{-2/3} < 1 \iff 2 < 3^{2/3} \iff 2^3 = 8 < 9 = 3^2$$

Ainsi $M_n \leq C 3^{n/3}$

ce qui prouve l'hérédité et clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(3^{n/3})}$$

Remarque : On trouve sans difficulté $M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 3$. On peut alors considérer $C = 1$ dans ce qui précède et on obtient le résultat plus précis

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M_n \leq 3^{n/3}$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie et C un convexe compact d'intérieur non vide symétrique par rapport à 0_E . On pose

$$\forall x \in E \quad j_C(x) = \inf \left\{ \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in C \right\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. (a) Rappeler la définition d'une norme.
- (b) Montrer que l'application j_C est à valeurs réelles positives et qu'elle est homogène.

(c) Établir pour $x \in E$ $j_C(x) = 0 \iff x = 0_E$

2. (a) Montrer pour $x \in E$ $x \in C \iff j_C(x) \in [0; 1]$

(b) Établir $\forall (x, y) \in E^2$ $j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$

Indication : Pour $\varepsilon > 0$, on pourra poser pour $(x, y) \in E^2$

$$x' = \frac{x}{j_C(x) + \varepsilon} \quad y' = \frac{y}{j_C(y) + \varepsilon} \quad t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$$

3. On munit l'espace E d'une norme. Montrer l'existence d'une application $f : E \rightarrow E$ continue, bijective et telle que $f(C) = \overline{B(0_E, 1)}$ et $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0_E, 1)$.

Corrigé : 1.(a) Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie :

(i) Homogénéité : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

(ii) Inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

(iii) Séparation : $\forall x \in E$ $N(x) = 0 \implies x = 0_E$

1.(b) Comme l'ensemble C est d'intérieur non vide, on dispose de $a \in C$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset C$. Par symétrie, on a $B(-a, \varepsilon) \subset C$. Puis, par convexité

$$\forall u \in B(0_E, \varepsilon) \quad u = \frac{1}{2}(-a + u + a + u) \in [-a + u; a + u] \subset C$$

autrement dit $B(0_E, \varepsilon) \subset C$ ce qui signifie $0_E \in \overset{\circ}{C}$. On pose

$$\forall x \in E \quad \Lambda(x) = \left\{ \lambda > 0, \frac{x}{\lambda} \in C \right\}$$

Soit $x \in E$. On choisit $\lambda = 1 + \frac{\|x\|}{\varepsilon}$. Ainsi, on a

$$\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| = \varepsilon \frac{\|x\|}{\varepsilon + \|x\|} < \varepsilon$$

ce qui prouve que $\frac{x}{\lambda} \in B(0_E, \varepsilon) \subset C$. Par conséquent, l'ensemble $\Lambda(x)$ est une partie non vide de \mathbb{R}_+ et admet donc une borne inférieure finie positive. Sans difficulté, on trouve $j_C(0_E) = 0$. Soit $\alpha > 0$. En posant $\mu = \frac{\lambda}{\alpha}$ pour $\lambda > 0$, on obtient

$$\Lambda(\alpha x) = \left\{ \lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in C \right\} = \left\{ \alpha \mu, \mu > 0, \frac{x}{\mu} \in C \right\} = \alpha \Lambda(x)$$

Il s'ensuit $j_C(\alpha x) = \text{Inf } \Lambda(\alpha x) = \text{Inf } \alpha \Lambda(x) = \alpha \text{Inf } \Lambda(x) = \alpha j_C(x)$

Soit $\alpha < 0$. Par symétrie de C , il vient

$$\Lambda(\alpha x) = \left\{ \lambda > 0, \frac{\alpha x}{\lambda} \in C \right\} = \left\{ \lambda > 0, \frac{(-\alpha)x}{\lambda} \in C \right\} = \Lambda(-\alpha x)$$

d'où $j_C(\alpha x) = -\alpha j_C(x)$

On conclut L'application j_C est à valeurs positives et est homogène.

1.(c) Soit $x \in E$ tel que $j_C(x) = 0$, ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda \in]0; \varepsilon[\quad : \quad \frac{x}{\lambda} \in C$$

Or, comme l'ensemble C est compact, on dispose de $M > 0$ tel que $C \subset B_f(0, M)$. Supposons $x \neq 0_E$. On pose $\varepsilon = \|x\|/M$. Alors, pour $\lambda \in]0; \varepsilon[$, on a $\frac{x}{\lambda} \notin B_f(0, M)$ d'où $\frac{x}{\lambda} \notin C$ ce qui contredit l'assertion précédente. On en déduit $x = 0_E$ et l'autre implication étant immédiate, on conclut

L'application j_C vérifie la séparation.

2.(a) Soit $x \in E$. On a $x \in C \iff 1 \in \Lambda(x) \implies \text{Inf } \Lambda(x) \leq 1$

d'où $x \in C \implies j_C(x) \in [0; 1]$

Réciproquement, supposons $j_C(x) \in]0; 1[$ (le cas $j_C(x) = 0$ est immédiat). Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose de $(\lambda_n)_n \in \Lambda(x)^\mathbb{N}$ telle que $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} j_C(x)$. On a $\frac{x}{\lambda_n} \in C$ pour n entier et par fermeture de C

$$\frac{x}{\lambda_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{x}{j_C(x)} \in C$$

Par convexité, il vient $x \in \left[0; \frac{x}{j_C(x)}\right] \subset C$

Ainsi, pour $x \in E$

$$x \in C \iff j_C(x) \in [0; 1]$$

2.(b) Soit $(x, y) \in E^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$x' = \frac{x}{j_C(x) + \varepsilon} \quad y' = \frac{y}{j_C(y) + \varepsilon} \quad t = \frac{j_C(x) + \varepsilon}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon}$$

On a $j_C(x') \leq 1$ et $j_C(y') \leq 1$

d'où $x' \in C$ et $y' \in C$. On a clairement $t \in [0; 1]$ et par convexité $tx' + (1-t)y' \in C$. Or, on trouve

$$tx' + (1-t)y' = \frac{x+y}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon} \in C$$

d'où $j_C(tx' + (1-t)y') = \frac{j_C(x+y)}{j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon} \leq 1$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0 \quad j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y) + 2\varepsilon$

Et on conclut

L'application j_C vérifie l'inégalité triangulaire.

3. D'après un résultat classique, on a $\overline{B(0_E, 1)} = B_f(0_E, 1)$. L'application j_C est une norme. Elle est donc continue car lipschitzienne dans l'espace E muni de la norme j_C et comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, elle est continue dans l'espace E muni de sa norme d'origine $\|\cdot\|$. On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = \begin{cases} 0_E & \text{si } x = 0_E \\ j_C(x) \frac{x}{\|x\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application f est continue sur $E \setminus \{0_E\}$ comme composée de telles fonctions. Pour $x \neq 0_E$, on a $\|f(x)\| = j_C(x)$ d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0_E} 0_E = f(0_E)$ par continuité de j_C . On a clairement

$$f(x) = 0_E \iff x = 0_E$$

Soient x, y vecteurs non nuls tels que $y = f(x)$. On en déduit

$$\|y\| = \|f(x)\| = j_C(x) \quad \text{et} \quad j_C(y) = \frac{j_C(x)^2}{\|x\|} = \frac{\|y\|^2}{\|x\|}$$

Ainsi, on trouve

$$y = f(x) \iff \begin{cases} y = j_C(x) \frac{x}{\|x\|} \\ j_C(x) = \|y\| \\ \|x\| = \frac{\|y\|^2}{j_C(y)} \end{cases} \iff x = \frac{\|y\|}{j_C(y)} y$$

ce qui prouve que l'application f est bijective. Puis, pour $x \in E$, on a

$$x \in C \iff j_C(x) \leq 1 \iff \|f(x)\| \leq 1 \iff f(x) \in B_f(0_E, 1) \iff x \in f^{-1}(B_f(0_E, 1))$$

d'où $C = f^{-1}(B_f(0_E, 1))$ et comme l'application C est bijective et notamment surjective, on obtient $f(C) = B_f(0_E, 1)$. Soit $x \in \overset{\circ}{C}$. On dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C$. Par suite, on a $(1+r)x \in C$ avec $r = \frac{\varepsilon}{1 + \|x\|}$ d'où

$$j_C((1+r)x) = (1+r)j_C(x) \leq 1 \implies j_C(x) < 1$$

On en déduit les inclusions

$$\overset{\circ}{C} \subset j_C^{-1}(] -\infty ; 1 [) = \{x \in E, j_C(x) < 1\} \subset C$$

Or, l'application j_C étant continue, l'ensemble $j_C^{-1}(] -\infty ; 1 [)$ est un ouvert inclus dans C et contenant $\overset{\circ}{C}$. Comme l'intérieur de C est le plus grand ouvert inclus dans C , on en déduit

$$\overset{\circ}{C} = \{x \in E, j_C(x) < 1\} \quad \text{et} \quad C \setminus \overset{\circ}{C} = \{x \in E, j_C(x) = 1\}$$

Ainsi, pour $x \in E$, on a

$$x \in C \setminus \overset{\circ}{C} \iff j_C(x) = 1 \iff \|f(x)\| = 1 \iff x \in f^{-1}(S(0_E, 1))$$

d'où $C \setminus \overset{\circ}{C} = f^{-1}(S(0_E, 1))$ et comme précédemment $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0_E, 1)$. On conclut

Il existe une application $f : E \rightarrow E$ continue, bijective et telle que $f(C) = \overline{B(0_E, 1)}$ et $f(C \setminus \overset{\circ}{C}) = S(0_E, 1)$.

Exercice 8 (X 2025)

Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une solution non nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1. Montrer que les zéros de y sont isolés.
2. Montrer que les zéros de y peuvent être rangés en une suite strictement croissante $(a_n)_n$ tendant vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de a_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $[a; b] \subset I$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments deux à deux distincts de $[a; b]$ qui soient des zéros de y . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $\alpha_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in [a; b]$. Par continuité, on a

$$0 = y(\alpha_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(\alpha) = 0$$

Quitte à ré-extraire, on suppose $\alpha_{\varphi(n)} \neq \alpha$ pour n entier. Par dérivabilité en α , il vient

$$0 = \frac{y(\alpha_{\varphi(n)}) - y(\alpha)}{\alpha_{\varphi(n)} - \alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y'(\alpha)$$

La fonction y est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + e^t y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction nulle en est solution, il s'ensuit que y est nulle d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, ce qui est contradictoire. On conclut

Une solution non nulle admet un nombre fini de zéros sur tout segment de I .

2. L'union des zéros de y est l'union pour $k \in \mathbb{N}$ de l'union des zéros de y sur $[k; k+1]$, autrement dit c'est une union dénombrable d'ensembles finis donc c'est un ensemble au plus dénombrable. Montrons qu'il n'est pas fini. Supposons par exemple qu'il existe a réel tel que $y(t) > 0$ pour tout $t \geq a$. On a $y''(t) = -e^t y(t) < 0$ pour tout $t \geq a$ d'où la concavité de y sur $[a; +\infty[$. Supposons qu'il existe $\alpha \geq a$ tel que $y'(\alpha) < 0$. Par concavité, le graphe de y est situé sous ses tangentes d'où

$$\forall t \geq a \quad y(t) \leq y'(\alpha)(t - \alpha) + y(\alpha)$$

Puis
$$y'(\alpha)(t - \alpha) + y(\alpha) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty \implies y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

ce qui contredit le signe de y . On en déduit que $y' \geq 0$ d'où y croît et en particulier $y(t) \geq y(a) > 0$ pour tout $t \geq a$. Par conséquent

$$\forall t \geq a \quad y''(t) = -e^t y(t) \leq -e^t y(a) \implies y''(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

Avec le théorème des accroissements finis ou une écriture intégrale, on en déduit

$$y'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty \quad \text{puis} \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

ce qui contredit le signe de y . Ainsi, l'ensemble des zéros de y est dénombrable et on peut donc les noter par la suite $(a_n)_n$ strictement croissante. Cette suite est non majorée car sinon, elle aurait une limite finie et un segment contiendrait une infinité de zéros de y . On conclut

L'ensemble des zéros de y peut se noter $(a_n)_n$ suite strictement croissante de limite $+\infty$.

3. On pose
$$\varphi : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{a_n}{2}}(t - a_n)\right) \quad \psi : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{a_{n+1}}{2}}(t - a_n)\right)$$

Supposons que y ne s'annule pas sur $]a_n; a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}]$. On considère

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad W(t) = \begin{vmatrix} y(t) & \varphi(t) \\ y'(t) & \varphi'(t) \end{vmatrix} = y(t)\varphi'(t) - y'(t)\varphi(t)$$

La fonction W est dérivable et on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad W'(t) = y(t)\varphi''(t) - y''(t)\varphi(t) = y(t)\varphi(t)(e^t - e^{a_n})$$

Ainsi, la fonction W' est de signe constant sur $]a_n; a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}]$ égal au signe de y sur cet intervalle. Or, on a

$$W(a_n) = \underbrace{y(a_n)}_{=0} \varphi'(a_n) - y'(a_n) \underbrace{\varphi(a_n)}_{=0} = 0$$

et
$$W(a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}) = y(a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}) \varphi'(a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}) = -e^{\frac{a_n}{2}} y(a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}})$$

Le signe de $W(a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}})$ contredit alors la monotonie de W . On en déduit que y s'annule sur $]a_n; a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}]$ d'où $a_{n+1} \in]a_n; a_n + \pi e^{-\frac{a_n}{2}}]$ et par suite

$$a_{n+1} - a_n \leq \pi e^{-\frac{a_n}{2}}$$

De la même manière, on démontre l'autre inégalité et on conclut

$$\boxed{\pi e^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leq a_{n+1} - a_n \leq \pi e^{-\frac{a_n}{2}}}$$

Remarque : Pour $t \in [a_n; a_{n+1}]$, on a $e^{a_n} \leq e^t \leq e^{a_{n+1}}$ ce qui amène à considérer les équations différentielles

$$y'' + e^{a_n} y = 0 \quad \text{et} \quad y'' + e^{a_{n+1}} y = 0$$

en s'intéressant à des solutions qui s'annulent en a_n d'où l'introduction des fonctions φ et ψ .

La suite $(a_n)_n$ est croissante non majorée sinon, elle aurait une limite finie et un segment contiendrait une infinité de zéros de y . Ainsi, on a $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et il s'ensuit $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et par conséquent $e^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\frac{a_n}{2}}$. On a donc

$$a_{n+1} - a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi e^{-\frac{a_n}{2}}$$

On pose $u_n = e^{\frac{a_n}{2}}$ pour n entier. On a

$$2(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{u_n}$$

Or
$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \quad \text{puisque} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

On obtient donc
$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Par sommation des relations de comparaison, on en déduit

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n\pi}{2}$$

On conclut

$$\boxed{a_n = 2 \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(n)}$$

Exercice 9 (ENS 2025)

Pour ω réel, on pose $R(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. Soit φ un morphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$. Montrer qu'il existe $\omega_1, \dots, \omega_r$ réels et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = P \operatorname{diag}(e^{tR(\omega_1)}, \dots, e^{tR(\omega_r)}, I_{n-2r}) P^\top$$

Corrigé : Montrons que l'application φ vu comme application de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dérivable. Soient t, h réels avec h non nul. On a

$$\frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) = \frac{1}{h} (\varphi(t)\varphi(h) - \varphi(t)) = \varphi(t) \frac{1}{h} (\varphi(h) - \varphi(0))$$

Ainsi, montrer la dérivabilité en 0 suffit à montrer la dérivabilité en tout point. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds$$

La fonction Φ est de classe \mathcal{C}^1 d'après le théorème fondamental d'intégration. Par changement de variables, il vient pour t réel

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \stackrel{u=s-t}{=} \int_{-t}^0 \varphi(t+u) du = -\varphi(t)\Phi(-t)$$

On a
$$\frac{\Phi(-t)}{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \Phi'(0) = I_n$$

et comme l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, on a $\Phi(-t)$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ pour $t \in V$ avec V un voisinage de zéro. On en déduit

$$\forall t \in V \quad \varphi(t) = -\Phi(t)\Phi(-t)^{-1}$$

La fonction $M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} = \det(M)^{-1} \text{Com}(M)^\top$ est de classe \mathcal{C}^1 car elle est à coordonnées rationnelles bien définies. Par composition, on en déduit que la fonction φ est dérivable en zéro et donc dérivable sur \mathbb{R} . Soient s, t réels. On a

$$\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

En fixant t et en dérivant en s , il vient

$$\varphi'(s+t) = \varphi'(s)\varphi(t)$$

d'où
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$$

On pose $A = \varphi'(0)$. Ainsi, la fonction φ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f \cdot X \\ X(0) = I_n \end{cases}$$

avec $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow AM$. La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est clairement solution et d'après l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = e^{tA}$$

Comme l'application φ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t)^\top \varphi(t) = I_n$$

et après dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t)^\top \varphi(t) + \varphi(t)^\top \varphi'(t) = 0$$

En particulier, pour $t = 0$, il vient

$$A^\top + A = 0$$

Enfin, en suivant un schéma analogue à la preuve de réduction des matrices orthogonales, on montre qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\omega_1, \dots, \omega_r$ réels tels que

$$P^\top AP = \text{diag}(R(\omega_1), \dots, R(\omega_r), 0, \dots, 0)$$

Sans difficulté, on obtient

$$P^\top e^{tA} P = \text{diag}(e^{tR(\omega_1)}, \dots, e^{tR(\omega_r)}, I_{n-2r})$$

On conclut

$\exists (P, \omega_1, \dots, \omega_r) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^r \quad \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = P \text{diag}(e^{tR(\omega_1)}, \dots, e^{tR(\omega_r)}, I_{n-2r}) P^\top$
--