ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.

2. On pose $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit n entier non nul. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 (IMT 2024)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. On suppose 0 valeur propre de A. Que peut-on dire de A ?
3. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.
   (a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Décrire la matrice A.

Exercice 5 (Mines 2025)

Pour $x \geqslant 0$, on pose $$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{F}'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $\mathrm{F}(x)$.
4. Calculer $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 (Mines 2025)

On définit l'application $\mathrm{C} : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{C}(\mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})$$

1. Montrer que l'application C est bien définie.
2. Étudier l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'injectivité de C. L'application est-elle surjective ? Dans le cas contraire, préciser son image.

Exercice 7 (Mines 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bornée, montrer

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})^n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Sup}\,\{f(x),\ x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) > 0\}$$

Exercice 8 (Centrale 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que l'espace $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie avec $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
2. (a) Montrer que si l'endomorphisme u est inversible, alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
   (b) Montrer $\mathrm{e}^u \in \mathbb{K}[u]$.
3. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et D l'opérateur de dérivation. Montrer que $u = \mathrm{id} - \mathrm{D}$ est inversible. A-t-on $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$?

Exercice 9 (Centrale 2025)

1. Démontrer le théorème d'inversion série-intégrale sous convergence uniforme sur un segment.
2. On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{I}(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\sqrt{x}\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que la fonction I est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer un équivalent simple pour $x \to +\infty$ de $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$.