IMT - BEOS 8655

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer qu'il existe une famille orthonormée de polynôme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficient dominant strictement positif et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.
2. On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines distinctes $x_1, \cdots, x_n$ dans $]-1, 1[$.
   (a) Soit $n > 1$. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un polynôme A non constant et de signe constant sur $[-1, 1]$ tel que $A|P_n$.
   (b) Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 2

Soit $a > 1$. On pose $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(a)n^a}.$$

1. Montrer qu'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance. La calculer dans ce cas.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_i = \{n \in \mathbb{N}^*,\ n|i\}$ et $E_i = [X \in A_i]$.

3. Soient i et j deux entiers naturels non nuls et distincts. E_i et E_j sont-ils indépendants ?

IMT - BEOS 8463

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

1. Montrer que $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$.
   Montrer que B est combinaison linéaire de $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   (b) Montrer que $S_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$.
   (c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_{n+1}^2 - S_n^2 = 2$.
   (d) Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
2. On suppose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.

CCINP - BEOS 7094

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et $\mathbb{N}_1$ sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit p la projection orthogonale sur F.

1. (a) Montrer que $F = \{x \in E,\ ||x|| = ||p(x)||\}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$.
   (c) Montrer que : $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. Qu'en déduire ?
2. Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels de E. On note p_F, p_G et p_H les projections orthogonales sur ces sous-espaces. On suppose que $p_F \circ p_G = p_H$.
   (a) Montrer que $F \cap G = H$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
   (c) On suppose réciproquement que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
   Montrer qu'il existe H sous-espace vectoriel de E tel que $p_H = p_F \circ p_G$.

Mines - BEOS 8786

Exercice 1

Pour tout réel x, on pose $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, la partie décimale.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2i\pi \ln k}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ?