ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral - Feuille n°6

Exercice 1 (CCINP 2025)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $\mathrm{M} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$$

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_n$ est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   On admettra dans la suite de l'exercice que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. (a) Justifier que pour tout n entier, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver $$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Corrigé : Exercice 49 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$

1. On suppose $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $\mathrm{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $\mathrm{S} = \dfrac{2}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$.

Corrigé : Exercice 89 CCPINP 2025

Exercice 3 (Mines-Telecom 2025)

Soit la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ ou } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les éléments propres de A.

Corrigé : On propose une approche élémentaire. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et λ réel. On a

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \lambda = 0, x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda \neq 0, \ldots$$

Puis $$\mathrm{AX} = 0 \iff x_1 = 0, \sum_{i=2}^{n} x_i = 0 \iff \mathrm{X} = \sum_{i=3}^{n} -x_i(e_2 - e_i)$$

d'où une base de Ker A. Puis, pour $\lambda \neq 0$, il vient

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_1 = \lambda x_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + \sum_{i=2}^{n} \dfrac{x_1}{\lambda} = \lambda x_1 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{x_1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{cases} x_1(\lambda^2 - \lambda - n + 1) = 0 \\ \forall i \in [\![2\,;\, n]\!] \qquad x_i = \dfrac{x_1}{\lambda} \end{cases}$$

On observe notamment $\mathrm{X} = 0 \iff x_1 = 0$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$, les vecteurs de la forme $(\lambda, 1, \ldots, 1)$ constituent des bases de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ et on a $\lambda \in \left\{ \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4n-3}\right) \right\}$. On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, \alpha, \beta\} \quad \text{avec} \quad \{\alpha, \beta\} = \left\{ \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4n-3}\right) \right\} \\ (e_2 - e_i)_{3 \leqslant i \leqslant n} \text{ base de } \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \qquad (\lambda, 1, \ldots, 1) \text{ base de } \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \text{ pour } \lambda \in \{\alpha, \beta\} \end{array}}$$

Remarque : On pouvait évidemment commencer par le calcul de χ_A :

$$\chi_\mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & -1 & \ldots & \ldots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \dfrac{1}{\mathrm{X}} \sum_{i=2}^{n} \mathrm{L}_i$, il vient

$$\chi_\mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} - 1 - \dfrac{n-1}{\mathrm{X}} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{X} - 1 - \frac{n-1}{\mathrm{X}} \right) \mathrm{X}^{n-1}$$

Ainsi
$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - n + 1)$$

et on poursuit comme précédemment.

Exercice 4 (Mines-Telecom 2025)

On pose
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum de f sur $\mathrm{K} = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid x + y \leqslant 1 \right\}$ puis préciser où ceux-ci sont atteints.

Corrigé : La fonction f est continue car polynomiale. L'ensemble K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie et par conséquent K est compact.

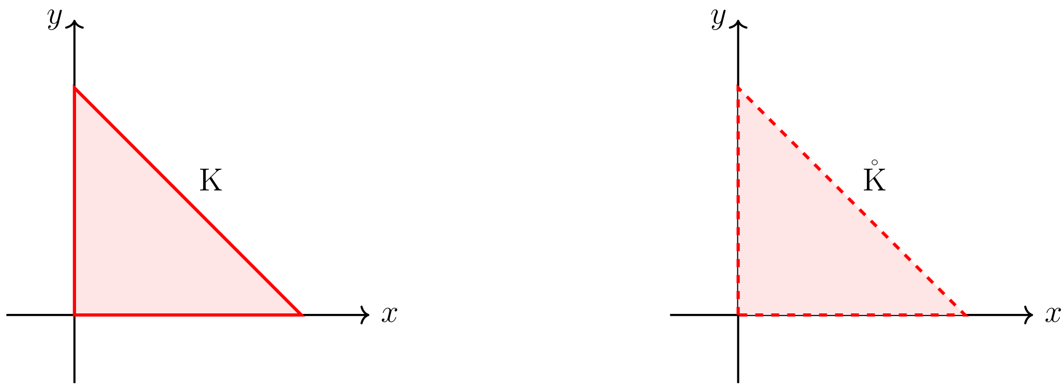

FIGURE 1 – Domaines K et $\mathring{\mathrm{K}}$

D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction f admet un minimum et un maximum sur K. Les extremums de f sont atteints soit sur $\partial\mathrm{K}$, soit dans $\mathring{\mathrm{K}}$. On trouve en munissant par exemple $\mathbb{R}^2$ de $\|\cdot\|_\infty$ l'intérieur $\mathring{\mathrm{K}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ et on voit que $f(x,y) > 0$ pour $(x,y) \in \mathring{\mathrm{K}}$. On observe que $f(x,y) = 0$ pour $(x,y) \in \partial\mathrm{K}$ puisque

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(0,t) = f(t,0) = f(t,1-t) = 0$$

On en déduit que la fonction f atteint son minimum sur K en tout point de $\partial\mathrm{K}$ et son maximum sur K dans $\mathring{\mathrm{K}}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathring{\mathrm{K}}$ car polynomiale et elle atteint son maximum sur K dans l'ouvert $\mathring{\mathrm{K}}$ donc en un point critique. On trouve pour $(x,y) \in \mathring{\mathrm{K}}$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y(1-y-2x) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint son minimum sur K en tout point de } \partial\mathrm{K} \text{ et son maximum sur K en } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

Donner un exemple de forme linéaire discontinue sur un espace vectoriel normé.

Corrigé : Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{E}$. On pose

$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \psi(f) = f(1) \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = t^n$$

L'application ψ est clairement linéaire et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \psi(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $\boxed{\text{L'application } \psi \text{ est discontinue en 0.}}$

Exercice 6 (Mines 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$. . Pour n entier non nul, on note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Montrer

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\mathbb{E}(X_1))$$

Corrigé : On a $X_1 \in L^1$ car bornée et $m = \mathbb{E}(X_1) \in [\,a\,;b\,]$ par croissance de l'espérance. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad |m-t| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(m)-f(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a $$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(m)\right| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(m)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(m)\right|\right)$$

Posons $A_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \eta\right\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(m)\right| &\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(m)\right| \mathbb{1}_{A_n}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(m)\right| \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right)\\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(A_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

D'après la loi faible des grands nombres, on a $\mathbb{P}(A_n) = o(1)$ et par conséquent

$$\boxed{\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\mathbb{E}(X_1))}$$

Exercice 7 (Centrale 2025)

Pour $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, on définit $A_c(f)$ par

$$A_c(f) = \inf\left\{s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ converge absolument}\right\}$$

avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$ et on note $Lf(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ la somme de la série quand celle-ci converge absolument.

1. Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et $s > A_c(f)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument.
3. Soient f, $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ telles que $A_c(f) < +\infty$ et $A_c(g) < +\infty$.

   (a) On suppose $\qquad \forall s > \max(A_c(f), A_c(g)) \qquad L_f(s) = L_g(s)$

   Montrer que $f = g$.

   (b) On définit $f \star g$ par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (f\star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

   Montrer $\qquad \forall s > \max(A_c(f), A_c(g)) \qquad L_{f*g}(s) = L_f(s) L_g(s)$

Corrigé : 1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si la partie A est minorée, elle possède une borne inférieure m caractérisée par

$$\boxed{\forall x \in A \qquad m \leqslant x \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in A \quad | \quad a < m + \varepsilon}$$

2. Soit $s > A_c(f)$. Par caractérisation de la borne inférieure, on dispose de t tel que $A_c(f) \leqslant t < s$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^t}$ converge absolument. Or, on a

$$\frac{f(n)}{n^s} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{f(n)}{n^t}\right)$$

Ainsi $\boxed{\text{Pour } s > \mathrm{A}_c(f), \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ converge absolument.}}$

3.(a) On suppose $f \neq g$ et on pose

$$n_0 = \mathrm{Min}\,\{n \in \mathbb{N}^* \mid f(n) \neq g(n)\}$$

Soit $s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$. Il vient par linéarité du symbole somme

$$\mathrm{L}_f(s) - \mathrm{L}_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^s} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^s}$$

On choisit $s_0 > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$ et on note $\mathrm{C} = f(n_0) - g(n_0)$. On a pour $s > s_0$

$$\mathrm{L}_f(s) - \mathrm{L}_g(s) = \frac{\mathrm{C}}{n_0^s}\left(1 + \mathrm{C}^{-1} n_0^s \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^{s_0} n^{s-s_0}}\right)$$

et, par inégalité triangulaire car convergence absolue

$$\left|\mathrm{C}^{-1} n_0^s \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^{s_0} n^{s-s_0}}\right| \leqslant |\mathrm{C}^{-1}|\, n_0^s \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{|f(n)-g(n)|}{n^{s_0}(n_0+1)^{s-s_0}}$$

Notant $\alpha = |\mathrm{C}^{-1}|\,(n_0+1)^{s_0}$, on a donc pour $s > s_0$

$$\left|\mathrm{C}^{-1} n_0^s \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{f(n)-g(n)}{n^{s_0} n^{s-s_0}}\right| \leqslant \alpha \left(\frac{n_0}{n_0+1}\right)^s \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{|f(n)-g(n)|}{n^{s_0}} \underset{s\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

Ainsi
$$\mathrm{L}_f(s) - \mathrm{L}_g(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}}{n_0^s}$$

d'où $\mathrm{L}_f \neq \mathrm{L}_g$. Par contraposition, on conclut

$$\boxed{\forall s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g)) \qquad \mathrm{L}_f(s) = \mathrm{L}_g(s) \quad\Longrightarrow\quad f = g}$$

3.(b) Soit $s > \max(\mathrm{A}_c(f), \mathrm{A}_c(g))$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n = \left\{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ ab = n\right\}$. La famille $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. D'après le théorème de Fubini, la famille $\left(\frac{f(a)}{a^s}\frac{g(b)}{b^s}\right)_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Par sommation par paquets, il vient

$$\mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s) = \sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{f(a)g(b)}{(ab)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{(a,b)\in\mathcal{C}_n} f(a)g(b)$$

L'application $\mathcal{D}_n \to \mathcal{C}_n, d \mapsto (d, n/d)$ réalise une bijection d'où

$$\sum_{d\mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ ab=n} f(a)g(b)$$

On conclut $\boxed{\mathrm{L}_f(s)\mathrm{L}_g(s) = \mathrm{L}_{f*g}(s)}$

Exercice 8 (X 2025)

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que

$$u_{n+1}-\frac{u_n}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Montrer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Corrigé : On pose $\qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad v_n=u_{n+1}-\dfrac{u_n}{2}$

Par récurrence, on montre $\qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n=\dfrac{u_0}{2^n}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v_k}{2^{n-k-1}}$

Soit $\varepsilon>0$. On dispose de N entier tel que $|v_k|\leqslant\varepsilon$ pour $k\geqslant \mathrm{N}$. Par inégalité triangulaire, il vient pour $n>\mathrm{N}$

$$|u_n|\leqslant\frac{1}{2^n}\left|u_0+\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}v_k2^{k+1}\right|+\varepsilon\sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k-1}}$$

Avec un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1}\frac{1}{2^{n-k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1-\mathrm{N}}\frac{1}{2^k}\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2$$

et on a $\qquad \dfrac{1}{2^n}\left|u_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}v_k2^{k+1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Ainsi, on peut choisir K entier $\geqslant$ N tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad n\geqslant\mathrm{K}\implies|u_n|\leqslant3\varepsilon$$

On conclut $\qquad \boxed{u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$

Exercice 9 (X 2025)

Pour quel entier n non nul le nombre réel $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est-il rationnel ?

Corrigé : Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ définie par

$$\mathrm{P}_0=2,\quad \mathrm{P}_1=\mathrm{X}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n$$

On peut aisément conjecturer

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{P}_n=\mathrm{X}^n+\mathrm{Q}_n\quad\text{avec}\quad\mathrm{Q}_n\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

Montrons cette propriété par récurrence double. Notons :

$$\mathscr{P}(n):\quad \mathrm{P}_n=\mathrm{X}^n+\mathrm{Q}_n\quad\text{avec}\quad\mathrm{Q}_n\in\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

• Les propriétés $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont clairement vraies.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)\implies\mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier non nul fixé. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{X}\mathrm{P}_{n+1}-\mathrm{P}_n&=\mathrm{X}\left(\mathrm{X}^{n+1}+\mathrm{Q}_{n+1}\right)-\mathrm{P}_n\\&=\mathrm{X}^{n+2}+\mathrm{Q}_{n+2}\end{aligned}$$

avec $\qquad \mathrm{Q}_{n+2}=\mathrm{X}\mathrm{Q}_{n+1}-\mathrm{P}_n\in\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n + \mathrm{Q}_n \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$$

On va ensuite établir

$$\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

On procède là encore par récurrence double. Notons

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{P}_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

• La vérification de $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ est immédiate.
• $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)$: On suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n entier fixé. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+2}(z + 1/z) &= (z + 1/z)\mathrm{P}_{n+1}(z + 1/z) - \mathrm{P}_n(z + 1/z) \\ &= (z + 1/z)(z^{n+1} + 1/z^{n+1}) - (z^n + 1/z^n) = z^{n+2} + 1/z^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'identité d'Euler, on a $2\cos(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Par suite, il vient

$$\mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = \mathrm{P}_n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

On en déduit $\boxed{\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \mathrm{P}_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)}$

Soit n entier non nul. On a $\quad \mathrm{P}_n\left(2\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\right) = 2\cos(2\pi) = 2$

Ainsi, le réel $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est racine de $\mathrm{P}_n - 2$. Par récurrence, on a $\mathrm{P}_n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ pour tout n entier. On note $\mathrm{P}_n - 2 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_n = 1$ et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$ tel que $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$. On en déduit

$$q^n \mathrm{P}_n\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$$

d'où

$$p^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = q\left(-\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-1-k}\right)$$

ce qui prouve $q | p^n$. Or, on a $p \wedge q = 1$ d'où $p^n \wedge q = 1$ et il en résulte $q = 1$. Ainsi, les racines rationnelles de $\mathrm{P}_n - 2$ sont des entiers relatifs. Si le nombre $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est rationnel, alors le nombre $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est racine rationnelle de $\mathrm{P}_n - 2$ donc entier relatif d'où

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in [\![-2\,;\, 2]\!]$$

et sans difficulté, on trouve

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in [\![-2\,;\, 2]\!] \iff n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

La synthèse étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\text{Le nombre réel } \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \text{ est rationnel pour } n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}.}$$

Exercice 10 (ENS 2025)

Soit E espace euclidien et u, v dans $\mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. Montrer que l'endomorphisme $u \circ v$ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}\,(u \circ v) \subset \mathbb{R}_+$.

Corrigé : On dispose de $s \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $u = s^2$ (argument classique). On vérifie $s \circ v \circ s \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base orthonormée de vecteurs propres de $s \circ v \circ s$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On suppose $\lambda_i > 0$ pour $i \in [\![1 ; r]\!]$ avec $r \leqslant n$. On pose $e_i = s(\varepsilon_i)$ pour $i \in [\![1 ; r]\!]$. On a

$$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad u \circ v(e_i) = s^2 \circ v \circ s(\varepsilon_i) = s(\lambda_i \varepsilon_i) = \lambda_i e_i$$

Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in \mathbb{R}^r$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0_\mathrm{E}$. On a

$$s \circ v \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, s \circ v \circ s(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i \varepsilon_i = 0_\mathrm{E}$$

On en déduit $$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad \alpha_i \lambda_i = 0$$

d'où la liberté de $(e_1, \ldots, e_r)$. En observant

$$\forall i \in [\![1 ; r]\!] \qquad e_i = u \circ v(\lambda_i^{-1} e_i)$$

on obtient $$\mathrm{rg}\,(u \circ v) \geqslant r$$

On a $$\mathrm{rg}\,(u \circ v) = \mathrm{rg}\,(s^2 \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\,(s \circ v)$$

Pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, notant $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_\mathscr{B} f$, on observe

$$\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}^\top) = \mathrm{rg}\,(f^*)$$

Ainsi, il vient

$$\mathrm{rg}\,(s \circ v) = \mathrm{rg}\,((s \circ v)^*) = \mathrm{rg}\,(v^* \circ s^*) = \mathrm{rg}\,(v \circ s)$$

Puis, on a clairement $\mathrm{Ker}\ v \circ s \subset \mathrm{Ker}\ s \circ v \circ s$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ s \circ v \circ s$ et soit $w \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$ tel que $v = w^2$. Il vient

$$\langle s \circ v \circ s(x), x \rangle = \langle w^2 \circ s(x), s(x) \rangle = \| w \circ s(x) \|^2 = 0$$

d'où $w \circ s(x) = 0_\mathrm{E}$ et donc $v \circ s(x) = 0_\mathrm{E}$ ce qui prouve $\mathrm{Ker}\ v \circ s = \mathrm{Ker}\ s \circ v \circ s$. Avec le théorème du rang, on obtient $\mathrm{rg}\,(v \circ s) = \mathrm{rg}\,(s \circ v \circ s)$ et ainsi

$$\mathrm{rg}\,(s \circ v \circ s) = r \leqslant \mathrm{rg}\,(u \circ v) \leqslant \mathrm{rg}\,(s \circ v) = \mathrm{rg}\,(v \circ s) = \mathrm{rg}\,(s \circ v \circ s) = r$$

La famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est donc une base de $\mathrm{Im}\ u \circ v$. Soit $x \in \mathrm{Im}\ u \circ v \cap \mathrm{Ker}\ u \circ v$. On dispose de $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ réels tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$ et

$$u \circ v \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i e_i = 0_\mathrm{E}$$

d'où la nullité des α_i et donc $x = 0_\mathrm{E}$. Avec le théorème du rang, on en déduit

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ u \circ v \oplus \mathrm{Ker}\ u \circ v$$

La famille $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de vecteurs propres de $\mathrm{Im}\ u \circ v$ associés à des valeurs propres strictement positives, famille qu'on peut compléter par une base de $\mathrm{Ker}\ u \circ v$ famille de vecteurs propres associés à la valeur propre zéro. On conclut

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \circ v \text{ est diagonalisable avec } \mathrm{Sp}\,(u \circ v) \subset \mathbb{R}_+.}$$

Variantes : 1. On procède matriciellement. Soient A, B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \quad \text{et} \quad \lambda_i > 0$$

On pose $\mathrm{B}' = \mathrm{P}^\top \mathrm{BP}$ et on note $\mathrm{B}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 \end{array}\right)$. On a clairement $\mathrm{B}' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il vient

$$\mathrm{P}^\top \mathrm{ABP} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \\ \hline \mathrm{B}_3 & \mathrm{B}_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{DB}_1 & \mathrm{DB}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

On dispose de $\Delta \in \mathscr{S}_r^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{D} = \Delta^2$. On note $s = n - r$ et on pose

$$\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta & \mathrm{K} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{K} \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$$

Avec un produit par bloc, on trouve

$$\mathrm{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1} & -\Delta^{-1}\mathrm{K} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}^{-1} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{DB}_1 & \mathrm{DB}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \mathrm{Q} &= \left(\begin{array}{c|c} \Delta^{-1} & -\Delta^{-1}\mathrm{K} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{DB}_1 & \mathrm{DB}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \Delta & \mathrm{K} \\ \hline 0 & \mathrm{I}_s \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \Delta\mathrm{B}_1\Delta & \Delta\mathrm{B}_1\mathrm{K} + \Delta\mathrm{B}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

La matrice $\Delta\mathrm{B}_1\Delta$ est symétrique réelle donc diagonalisable. On va chercher à choisir K telle que $\Delta\mathrm{B}_1\mathrm{K} + \Delta\mathrm{B}_2 = 0$. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{MX} = 0 \iff \mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = 0$$

En effet, on dispose de $\mathrm{N} \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{N}^2$ et il vient

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{MX} = 0 \iff \|\mathrm{NX}\|^2 = 0 \iff \mathrm{NX} = 0 \iff \mathrm{MX} = 0$$

On peut décomposer X dans une base orthonormée de vecteurs propres. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on note $\widetilde{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a donc

$$\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{X}} = 0 \iff \widetilde{\mathrm{X}}^\top \mathrm{B}\widetilde{\mathrm{X}} = 0$$

Par ailleurs, on trouve

$$\widetilde{\mathrm{X}}^\top \mathrm{B}\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}^\top \mathrm{B}_1 \mathrm{X}$$

On en déduit $\mathrm{B}_1 \in \mathscr{S}_r^+(\mathbb{R})$ et par suite

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{B}_1 \mathrm{X} = 0 \iff \mathrm{B}_1 \mathrm{X} = 0$$

La matrice B' est symétrique d'où $\mathrm{B}_3 = {\mathrm{B}_2}^\top$ et il vient

$$\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{X}} = 0 \iff (\mathrm{B}_1\mathrm{X}, {\mathrm{B}_2}^\top \mathrm{X}) = (0, 0)$$

Les applications $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{B}_1\mathrm{X}$ et $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{R}) \mapsto (\mathrm{B}_1\mathrm{X}, {\mathrm{B}_2}^\top \mathrm{X})$ ont même noyau et d'après le théorème du rang, on en déduit

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{B}_1) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{B}_1 | {\mathrm{B}_2}^\top)$$

Les colonnes de ${\mathrm{B}_2}^\top$ sont combinaisons linéaires des colonnes de B_1. On en déduit qu'il existe une matrice $\mathrm{R} \in \mathscr{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ telle que ${\mathrm{B}_2}^\top = \mathrm{RB}_1$ d'où $\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_1\mathrm{R}^\top$. On a donc

$$\mathrm{Q}^{-1}\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{DB}_1 & \mathrm{DB}_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta\mathrm{B}_1\Delta & \Delta\mathrm{B}_1(\mathrm{K}+\mathrm{R}^\top) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

On choisit $\mathrm{K} = -\mathrm{R}^\top$ puis on diagonalise le bloc $\Delta\mathrm{B}_1\Delta \in \mathscr{S}_r^+(\mathbb{R})$ et le résultat suit.

2. On peut aussi considérer les induits $u' = u_{\mathrm{Im}\, u}$ et $w = (u \circ v)_{\mathrm{Im}\, u}$. On utilise plusieurs fois le résultat auxiliaire suivant : pour $f \in \mathscr{S}^+(\mathrm{E})$, on a

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle f(x), x\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 0_{\mathrm{E}}$$

On vérifie $u' \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{Im}\, u)$ puis on définit un nouveau produit scalaire

$$\forall (x,y) \in (\mathrm{Im}\, u)^2 \qquad \varphi(x,y) = \langle u'^{-1}(x), y\rangle$$

On établit $w \in \mathscr{S}_\varphi^+(\mathrm{Im}\,(u))$ et l'induit par w sur $\mathrm{Im}\,(u \circ v)$ sev de $\mathrm{Im}\, u$ est donc également auto-adjoint positif pour le produit scalaire φ. Enfin, on montre

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, u \circ v \oplus \mathrm{Ker}\, u \circ v$$

et on conclut alors sans difficulté.